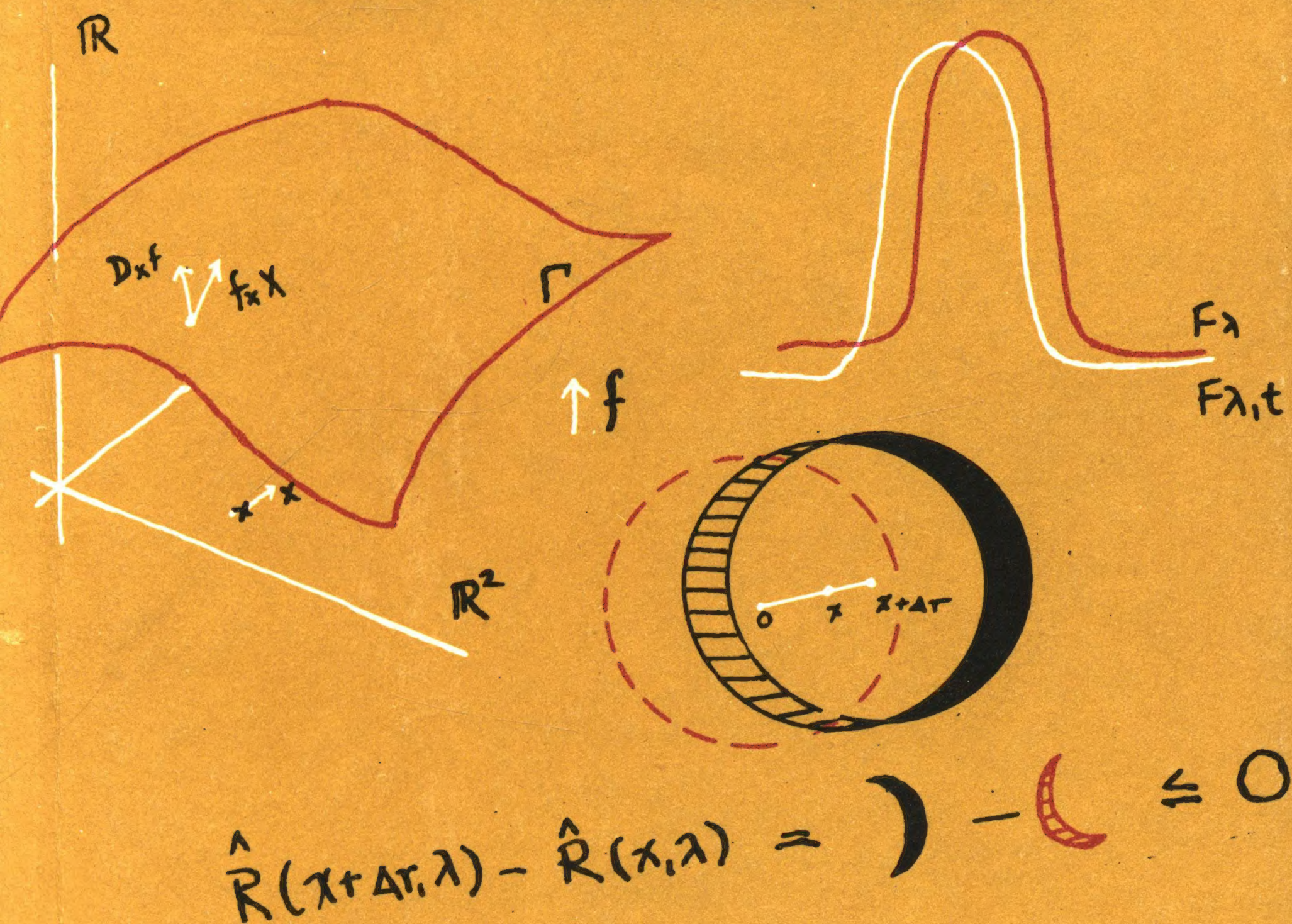


Д. Фрид, К. Уленбек

ИНСТАНТОНЫ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ



Издательство · Мир ·

ИНСТАНТОНЫ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Daniel S. Freed, Karen K. Uhlenbeck

INSTANTONS AND FOUR-MANIFOLDS

Springer-Verlag

New York Berlin Heidelberg Tokyo

Д. Фрид, К. Уленбек

ИНСТАНТОНЫ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Перевод с английского
Ю.П. СОЛОВЬЕВА



МОСКВА «МИР» 1988

ББК 22.152

Ф 88

УДК 515.1

Фрид Д., Уленбек К.

Ф 88 Инстантоны и четырехмерные многообразия: Пер. с
англ. — М.: Мир, 1988. — 272 с., ил.

ISBN 5-03-001158-7

Книга американских математиков по актуальной тематике, тесно связанной с физикой и использующей методы геометрии, математического анализа, вариационного исчисления, топологии. В ней доказана теорема Дональдсона, из которой следует, что четырехмерное евклидово пространство имеет много неэквивалентных гладких структур. Изложение отличается методическими достоинствами: много внимания уделено разъяснению конструкций, определений.

Для математиков разных специальностей, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

Ф 1702040000-447 14-88, ч. 1
041(01)-88

ББК 22.152

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001158-7 (русск.)

ISBN 0-387-96036-8 (англ.)

© 1984 by Springer-Verlag
New York Inc.
All rights reserved.
Authorized translation
from English language
edition published by
Springer-Verlag Berlin
Heidelberg New York
Tokyo

© перевод на русский язык,
"Мир", 1988

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Основная проблема топологии многообразий состоит в характеристике многообразий посредством алгебраических инвариантов. Например, ориентируемые замкнутые связные двумерные многообразия полностью характеризуются родом g , однозначно определяющим их тип диффеоморфизма. Аналогичным образом классифицируются неориентируемые двумерные многообразия. В 1981 г. американский математик Майкл Фридман доказал, что для любой целочисленной унимодулярной квадратичной формы ω существует замкнутое односвязное топологическое четырехмерное многообразие M , реализующее ω как форму пересечений циклов. Кроме того, если форма ω четна, то любые два многообразия, реализующие ω , являются гомеоморфными. Если же форма ω нечетна, то существуют ровно два негомеоморфных многообразия M_1 и M_2 , реализующих ω . Эти два многообразия различаются следующим признаком: произведение одного из них, скажем M_1 , на окружность S^1 сглаживаемо, в то время как $M_2 \times S^1$ является несглаживаемым. Тем самым Фридман получил полную классификацию замкнутых односвязных топологических четырехмерных многообразий. Из этой классификации, в частности, следует четырехмерная топологическая гипотеза Пуанкаре, утверждающая, что всякая четырехмерная гомотопическая сфера Σ^4 гомеоморфна стандартной сфере S^4 .

Подход, использованный Фридманом, не позволяет выяснить, какие целочисленные унимодулярные формы реализуются как формы пересечений гладких четырехмерных многообразий. Очень сильные и неожиданные результаты в этом направлении были получены в 1982 г. английским математиком Саймоном Дональдсоном. Он доказал, что если форма пересечений ω замкнутого односвязного гладкого четырехмерного многообразия положительно определена, то она при-

водится над $\mathbb{Z}$ к сумме квадратов. Пожалуй, самым удивительным в работе Дональдсона является то обстоятельство, что топологическая по своей сути теорема доказывается с привлечением идей и методов математической физики – теории калибровочных полей.

Истоки теории калибровочных полей восходят к работе Г.Вейля «Gravitation und Elektrizität», опубликованной в 1918 г. и посвященной объединению электромагнитного и гравитационного взаимодействий. В подходе Вейля параллельный перенос касательного вектора к пространству Минковского M приводил к изменению не только его направления, как в теории Эйнштейна, но и длины. На современном языке это означает переход от римановой связности в расслоении ортонормированных реперов над M к связности в главном расслоении со структурной группой $U(1)$. Коэффициенты соответствующей формы связности A были отождествлены Вейлем с потенциалами электромагнитного поля, а коэффициенты формы кривизны $F = dA$ с напряженностями этого поля. Кроме того, Вейль показал, что полученная таким образом теории инвариантна относительно послойных преобразований касательного расслоения $T(M)$, названных им калибровочными преобразованиями.

В 1954 г. американские физики Ч.Янг и Р.Миллс, изучая сильные взаимодействия нуклонов, рассмотрели вместо $U(1)$ -расслоения векторное расслоение над M со структурной группой $SU(2)$. Наличие калибровочной инвариантности приводит в их теории, подобно теории Вейля, к существованию векторного поля, которое переносит сильное взаимодействие. Развитие идей Янга – Миллса позволило создать в конце 60-х годов единую теорию электромагнитного и слабого взаимодействий (Ш. Глэшоу, С.Вейнберг, А. Салам), а затем – калибровочную теорию сильного взаимодействия элементарных частиц, так называемую квантовую хромодинамику.

В основе всех этих теорий лежит следующая математическая структура. Пусть M – гладкое четырехмерное многообразие с псевдоримановой метрикой, G – полупростая компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и $\pi: P \rightarrow M$ – главное G -расслоение. Фиксируем в этом расслоении форму связности $A: T(P) \rightarrow \mathfrak{g}$, и пусть $\Omega = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ – форма кривизны этой связности. Если $E = P \times_G \mathfrak{g}$ – присоединенное векторное расслоение, то

2-форме Ω соответствует на M форма F со значениями в E . Эта форма интерпретируется как калибровочное поле — переносчик того или иного взаимодействия. Эволюция калибровочного поля описывается в терминах функционала действия $\int \text{Tr}(F \wedge *F)$, уравнения Эйлера — Лагранжа которого имеют вид $D * F = 0$ и называются уравнениями Янга — Миллса. Автоморфизмы главного расслоения P называются калибровочными преобразованиями. Они образуют группу $\mathcal{G}$. Принцип калибровочной инвариантности означает, что физический смысл имеют лишь классы решений уравнений Янга — Миллса относительно $\mathcal{G}$. Они образуют так называемое пространство модулей $\mathcal{M}$.

Важным ответвлением этого направления является исследование уравнений Янга — Миллса на римановом многообразии M . Первые нетривиальные решения уравнений Янга — Миллса в случае, когда $M = S^4$, $G = SU(2)$ и $\int \text{Tr}(F \wedge *F) = \pm 8\pi^2$ (так называемые инстантоны), были найдены в 1975 г. А.А.Белавиным, А.М.Поляковым, А.С.Шварцем и Ю.С.Тюпкиным [BPST]. Полное описание решений на $M = S^4$ в случае группы $G = SU(2)$ было получено М.Атьей, Н.Хитчином, В.Г.Дринфельдом и Ю.И.Маниным [AHDM]. В работе [ANS] М.Атья, Н.Хитчин и И.Зингер вычислили размерности пространств модулей решений уравнений Янга — Миллса для любых римановых четырехмерных многообразий M и компактных полупростых групп G . Исследование топологической структуры пространства модулей и привело Дональдсона к его замечательным результатам.

Книга Д.Фрида и К.Уленбек посвящена доказательству теоремы Дональдсона. Она представляет собой обзор, охватывающий весьма обширный и разнородный материал из нелинейного анализа, глобальной дифференциальной геометрии и топологии многообразий, на котором основано это доказательство. Книга написана по материалам семинара, что в значительной мере определило ее стиль. Главное внимание авторы уделяют идеям и методам; оставляя некоторые технические детали читателям. В то же время благодаря умелому отбору материала авторам удалось, сохранив малый объем книги, существенно сократить требования к предварительной подготовке читателя, у которого предполагается только знание начал алгебраической топологии.

За время, прошедшее с момента выхода английского издания, топология четырехмерных многообразий обогатилась рядом новых выдающихся открытий. Многие из них основаны на результатах Дональдсона или же используют развитую им технику. Русский перевод книги поможет читателям, в том числе студентам и аспирантам, ощутить себя в гуще событий одной из наиболее активно развивающихся областей современной математики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла в результате работы семинара, организованного Майклом Фридманом и Карен Уленбек (старший автор) в Институте математических исследований в Беркли в первые месяцы его существования. Первоначально на Дана Фрида (младший автор) была возложена обязанность делать записи. Специальной целью семинара был разбор доказательства теоремы Саймона Дональдсона, анонсированной предыдущей весной. Дональдсон доказал несглаживаемость некоторых четырехмерных топологических многообразий; годом раньше Фридман построил эти многообразия как часть своего решения четырехмерной топологической гипотезы Пуанкаре.

Эффективное применение теорем Дональдсона и Фридмана к выводу существования фальшивых пространств $\mathbb{R}^4$ получило широкую известность (в той мере, в какой математика вообще может получить широкую известность). Примечательно, что Дональдсон доказал свою топологическую теорему, изучая пространство решений уравнений Янга – Миллса, которые относятся к ультрасовременной физике. Неизбежен философский вывод: мы, математики, нуждаемся в физике!

Сначала семинар очень хорошо посещался. К сожалению, через три месяца обнаружилось, что мы разобрали почти все, что было опубликовано, но очень мало продвинулись по пути к полному и подробному доказательству. Дальнейшая совместная работа в трех городах, разделенных тремя тысячами миль, привела к такому доказательству; ему и посвящена эта книга. Семинар увяз в тяжелой аналитической технике (главы 6 – 9), которая занимает и основную часть статьи Дональдсона (с меньшими деталями). По мере продвижения нам стало ясно, что технический аппарат нелинейных

дифференциальных уравнений, использованный в доказательстве, в одном важном аспекте резко отличается от геометрического и топологического аппарата. Последний можно без труда извлечь из стандартных руководств и учебников, в то время как по нелинейному анализу не существует какого-то доступного стандартного набора источников. Мы попытались исправить это положение, включив необходимый подготовительный материал по всем затронутым темам, но особенно по анализу (имеются в виду нелинейные эллиптические уравнения в частных производных).

Мы обязаны многим математикам. Прежде всего наше доказательство в своих наиболее существенных частях следует работе Дональдсона, хотя у нас приводится больше подробностей. В то же время мы даем более прозрачное доказательство теорем трансверсальности (гл. 3 – 4), несколько другое доказательство теоремы об ориентируемости (гл. 5) и совсем новое доказательство теоремы существования Таубса, в котором используются некомпактные многообразия (гл. 7). По ходу дела мы получаем новое простое доказательство теоремы об устранении особенностей (приложение D). Кроме того, нам удалось включить более новые важные методы Финтушела и Стерна (гл. 10). Еще одну дань благодарности мы отдаем Майклу Фридману. Он был инициатором семинара, а также нашим главным консультантом по топологии в течение всей работы. Глава I написана по материалам его первой лекции; кроме того, ему принадлежит значительная часть введения. Мы также сердечно благодарим докладчиков на семинаре: кроме Майкла Фридмана еще Андреаса Флоерса, Стива Седлачека и Андреяса Трейбергса. Многие другие математики помогали нам своими идеями, предложениями и замечаниями. Мы выражаем искреннюю признательность Бобу Эдвардсу, Робу Кёрби, Ричарду Лашофу, Джону Лотту, Марку Маховальду, Кену Миллетту, Тому Паркеру, Марку Ронану, Рику Шёну, Рону Стерну, Клиффу Таубсу и Джону Вуду и надеемся, что не обидели никого нечаянным пропуском. Кроме того, Дан Фрид особенно хотел бы поблагодарить своего научного руководителя, проф. Зингера, который давал нам ценные советы и информацию, а также открыл перед нами вдохновляющие перспективы. Основную массу корректур прочитал Дэвид Гросьер. Мы признательны Дэвиду и Луису Крейнам, которые выловили несколько таинственных утверждений и пробелов в доказательствах, и надеемся, что читатель к нам присоединится.

Институт математических исследований в Беркли охотно и щедро оказывал нам множество услуг: предоставил помещение, обеспечил перепечатку и даже оплатил часть авиабилетов. Ларри Кастро достоин особой награды за то терпение, с которым он переносил все наши исправления и изменения — слава богу, что в нашем распоряжении был текстовый процессор! Гарвардский и Северо-западный университеты предоставляли нам в нужное время необходимые помещения. Эви Кавалер нарисовала оригинальные иллюстрации. И, наконец, Дан Фрид искренне благодарит Рауля Ботта за поддержку и теплое гостеприимство.

Беркли, Калифорния

Дан Фрид,
Карен Уленбек

ВВЕДЕНИЕ

Топологи изучают три типа многообразий – топологические (или непрерывные) многообразия (TOP), кусочно-линейные многообразия (PL), гладкие (дифференцируемые) многообразия (DIFF), а также соотношения между ними. Основная проблема топологии многообразий заключается в том, чтобы установить, когда топологическое многообразие допускает PL-структуру, и, если такая структура есть, выяснить, имеется ли согласованная с ней гладкая структура. С начала 50-х годов известно, что любое топологическое многообразие M размерности ≤ 3 допускает единственную гладкую структуру. В высоких размерностях ситуация иная. В 1968 г. Кёрби и Зибенманн показали, что если $\dim M \geq 5$, то имеется единственное препятствие $\alpha(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ к существованию PL-структуры на топологическом многообразии M . Кроме того, при тех же ограничениях на размерность имеются препятствия к существованию гладкой структуры на PL-многообразии; они принимают значения в группах гомотопических сфер. В размерности 4 имеется одно важное упрощение, освобождающее нас от необходимости рассматривать кусочно-линейную категорию: каждое четырехмерное PL-многообразие допускает единственную согласованную гладкую структуру. Что же касается препятствия Кёрби – Зибенманна $\alpha(M)$, то в случае спинорных многообразий оно тесно связано с одним классическим результатом Рохлина, датированным 1952 г. Теорема Рохлина утверждает, что сигнатура гладкого спинорного четырехмерного многообразия делится на 16. Из арифметических свойств квадратичных форм следует, что сигнатура топологического спинорного (= почти параллелизуемого) четырехмерного многообразия M делится на 8 и что $\alpha(M) \in$

$\in \mathbb{Z}_2 = 8\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ есть не что иное, как сигнатура по модулю 16. Если многообразие M не является спинорным, то инвариант Кёрби – Зибенманна дает дополнительную информацию, не относящуюся к форме пересечений.

Недавно Саймон Дональдсон открыл новый тип «препятствия» к сглаживаемости четырехмерных многообразий. Он доказал, что если форма пересечений ω компактного односвязного гладкого четырехмерного многообразия знакоопределенна, то она эквивалентна над кольцом целых чисел стандартной диагональной форме $\pm \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Годом раньше Майкл Фридман классифицировал все компактные односвязные топологические четырехмерные многообразия и установил, что каждая унимодулярная симметрическая билинейная форма реализуется как форма пересечений некоторого топологического четырехмерного многообразия. Рассматриваемые вместе эти результаты дают много примеров несглаживаемых четырехмерных многообразий с нулевым инвариантом Кёрби – Зибенманна. Основываясь на исследованиях Эндрю Кассона, выполненных в начале семидесятых годов, Фридман и другие авторы вывели из теоремы Дональдсона еще более удивительное следствие: существование экзотических гладких структур на $\mathbb{R}^4$. Сколько всего таких «фальшивых» $\mathbb{R}^4$, пока неизвестно, хотя несколько экзотических структур уже найдено. Фридман считает, что, по мнению топологов, их может оказаться несчетное множество¹⁾. Если это так, то задача классификации гладких структур, которая в высших размерностях решается с помощью характеристических классов и, следовательно, является дискретной, может попасть во владения геометрии. Подобно тому как существуют непрерывные пространства модулей комплексных структур на римановых поверхностях, могут существовать пространства модулей гладких структур на четырехмерных многообразиях! Как бы то ни было, теорема Дональдсона показывает, что гладкие структуры в размерности 4 нельзя описать в терминах поднятий касательного расслоения, т.е. в терминах характеристических классов. В качестве кон-

¹⁾ Недавно Клиффорд Таубс показал, что существует несчетное семейство различных гладких структур на $\mathbb{R}^4$ (см. Taubes C.H. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. – J. Diff. Geom., 1987, v. 25, № 3, pp. 363–430). – Прим. перев.

кретного примера, в котором поднятие расслоения ничего не дает, упомянем многообразие $|E_8 \oplus E_8|$ и фальшивое $\mathbb{R}^4$.

Поразительно, что и теорема Рохлина, и теорема Дональдсона доказываются с помощью исследования класса заведомо не дискретных объектов — эллиптических операторов на гладких четырехмерных многообразиях. Доказательство теоремы Дональдсона, которое не опиралось бы так прочно на геометрию и анализ, остается заветной мечтой топологов.

Изучение эллиптических операторов на компактных многообразиях часто приводит к теоремам, связывающим геометрию многообразия с его топологией. Краеугольным камнем линейной эллиптической теории является теорема Ходжа — Де Рама. С гладким n -мерным многообразием M связан комплекс дифференциальных операторов

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0,$$

где $d: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$ — внешнее дифференцирование q -форм. Для компактного многообразия M этот комплекс Де Рама имеет конечномерные группы когомологий

$$(1) \quad H_{DR}^q(M) = \frac{\text{Ker } d: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)}{\text{Im } d: \Omega^{q-1}(M) \rightarrow \Omega^q(M)},$$

изоморфные группам вещественных сингулярных когомологий $H^q(M; \mathbb{R})$. Следовательно, пространства $H_{DR}^q(M)$, которые априори зависят от гладкой структуры, в действительности являются топологическими инвариантами. Если многообразие M наделено римановой метрикой, то существуют канонические представители каждого класса когомологий. Чтобы описать их, рассмотрим так называемый функционал энергии

$$\mathcal{E}(\alpha) = \int_M |\alpha|^2, \quad \alpha \in \Omega^q(M).$$

Очевидно, что для компактного многообразия M без края этот функционал зависит лишь от класса когомологий формы, т.е. не меняется при замене замкнутой формы α на $\alpha' = \alpha + d\beta$, где $\beta \in \Omega^{q-1}(M)$. Теорема Ходжа – Де Рама утверждает, что в каждом классе когомологий существует единственная замкнутая форма α , минимизирующая функционал $\mathcal{E}(\alpha)$ и, значит, удовлетворяющая уравнению Эйлера – Лагранжа

$$(2) \quad d^* \alpha = 0.$$

Так как, кроме того, $d\alpha = 0$, то уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(3) \quad \Delta \alpha = (dd^* + d^*d)\alpha = 0.$$

Здесь $\Delta = dd^* + d^*d$ – оператор Лапласа – Бельтрами на q -формах. Любая форма α , удовлетворяющая уравнению (3), называется гармонической. Многие приложения теории Ходжа – Де Рама к глобальной дифференциальной геометрии основаны на формулах, выражающих разность между оператором Лапласа $dd^* + d^*d$ на формах и дифференциальным оператором $\nabla^* \nabla$, образованным при помощи полной ковариантной производной, как алгебраическим оператором, включающим кривизну. Например, применяя такие формулы к 1-формам, Бохнер в 1946 г. доказал, что для компактного многообразия M , допускающего метрику с положительной кривизной Риччи, выполняется условие $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$.

Теория Ходжа – Де Рама распространяется на более общие линейные эллиптические операторы. Они появляются на многообразии в виде эллиптического комплекса. Эллиптический комплекс – это конечная последовательность операторов первого порядка

$$0 \rightarrow C^\infty(\xi_0) \xrightarrow{D_1} C^\infty(\xi_1) \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} C^\infty(\xi_n) \rightarrow 0,$$

определенных в сечениях векторных расслоений ξ_i над M и таких, что

$$(i) \quad D_{i+1} \circ D_i = 0,$$

(ii) последовательность символов

$$0 \rightarrow \xi_0 \xrightarrow{\sigma(D_1)(\theta)} \xi_1 \xrightarrow{\sigma(D_2)(\theta)} \dots \xrightarrow{\sigma(D_n)(\theta)} \xi_n \rightarrow 0$$

точна для любого ненулевого ковектора $\theta \in T^*M$. Группы когомологий $H^q(\xi)$ эллиптического комплекса определяются точно так же, как группы когомологий комплекса Де Рама (I); для компактного многообразия M они конечномерны. Если на расслоениях ξ_i заданы метрики, а на M — форма объема, то определены формально сопряженные в смысле нормы пространства L^2 операторы D_q^* . Обобщенная на этот случай теорема Ходжа — Де Рама утверждает, что и теперь в каждом классе когомологий пространства $H^q(\xi)$ существует единственный канонический представитель f , удовлетворяющий уравнению

$$D_{q-1}^* f = 0.$$

Поскольку $D_q f = 0$, это уравнение эквивалентно уравнению второго порядка

$$(D_{q-1} D_{q-1}^* + D_q^* D_q) f = 0.$$

Теорема Аты — Зингера об индексе позволяет выразить альтернированную сумму $\sum_q (-1)^q \dim H^q(\xi)$ в терминах характеристических классов многообразия M и расслоения ξ , построенного по последовательности символов. (Для того чтобы вычислить размерность конкретной группы $H^q(\xi)$, обычно комбинируют теорему Аты — Зингера с теоремами об обращении в нуль.)

Эллиптические комплексы можно использовать для исследования связи между дифференциальной геометрией, алгебраической геометрией и топологией. Проиллюстрируем это на важном для нас топологическом примере — теореме Рохлина. На спинорных многообразиях M существует естественный эллиптический оператор — оператор Дирака, — индекс которого совпадает с $\hat{A}$ -родом. Это некоторый характеристический класс многообразия M , вычисленный на фундаментальном цикле; оказывается, что для четырехмерных многообразий он равен $1/8$ сигнатуры. Так как индекс эллиптического комплекса есть целое число, то и $\hat{A}$ -род много-

образия M – целое число. (Заметим, что именно эта проблема – объяснить целочисленность $\hat{A}(M)$ для спинорных многообразий M – привела Атью и Зингера к теореме об индексе.) Далее, спинорное представление в размерности 4 является симплектическим, поэтому пространство гармонических спиноров (ядро и коядро оператора Дирака) является кватернионным. Следовательно, $\hat{A}(M)$ – четное число и сигнатура многообразия M делится на 16.

В размерности 4 наряду с оператором Дирака существует весьма полезный в приложениях скрученный оператор Дирака, получающийся тензорным умножением на одно из полуспинорных расслоений. Мы упоминаем его здесь по той причине, что он представляет собой, по существу, линеаризованный вариант нелинейного оператора, который изучался Дональдсоном для доказательства его теоремы. Скрученный оператор Дирака можно описать явно в терминах автодуальности и дифференциальных форм. А именно, если M – ориентированное риманово четырехмерное многообразие, то шестимерное расслоение $\Omega^2(M)$ канонически расщепляется в прямую сумму трехмерных расслоений

$$\Omega^2(M) = \Omega_+^2(M) \oplus \Omega_-^2(M),$$

соответствующую разложению алгебры Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$. Элементы из $\Omega_+^2(M)$ называются автодуальными формами, а элементы из $\Omega_-^2(M)$ – антиавтодуальными формами. Обозначив через $d_-: \Omega^1(M) \rightarrow \Omega_-^2(M)$ композицию оператора внешнего дифференцирования $d: \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ с проекцией $P_-: \Omega^2(M) \rightarrow \Omega_-^2(M)$, мы получаем эллиптический комплекс

$$(4) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_-} \Omega_-^2(M) \rightarrow 0.$$

Тогда скрученный оператор Дирака – это

$$d^* \oplus \sqrt{2} d_-: \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M) \oplus \Omega_-^2(M).$$

Нелинейный анализ оказал на геометрию и топологию не меньшее влияние, чем линейный анализ. Основные приложения нелинейного анализа связаны с теорией Морса геодезических на римановых многообразиях – вариационной теорией для нелинейных

обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из самых первых приложений стала теорема Адамара – Картана (1898/1928 г.), утверждающая, что универсальное накрытие полного риманова n -мерного многообразия с метрикой неположительной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Для положительно искривленных многообразий имеет место теорема Майера (1941 г.): полное риманово многообразие с положительной кривизной Риччи компактно и имеет конечную фундаментальную группу. Это более сильный результат, чем полученная с помощью линейной теории теорема Бохнера, в которой требуется, чтобы многообразие M было компактным, а утверждается всего лишь, что $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$. Упомянем здесь также знаменитую теорему периодичности Ботта, которую он доказал в 1956 г., изучая с помощью теории Морса геодезические на группах Ли.

До недавнего времени серьезные применения нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений к геометрии и топологии явно отставали. В последние годы появился ряд геометрических и топологических результатов, основанных на нелинейном анализе. Многие из них связаны с минимальными поверхностями. Например, данное Шёном и Яу доказательство гипотезы положительной массы в общей теории относительности опирается на свойства уравнений минимальной поверхности и приводит к следующей геометрической теореме: если фундаментальная группа трехмерного многообразия M содержит подгруппу, изоморфную фундаментальной группе компактной поверхности рода $g \geq 1$, то M не допускает метрики положительной скалярной кривизны. Примерно в это же время Микс и Яу нашли с помощью минимальных поверхностей новые доказательства леммы Дена (теоремы о петле) и теоремы о сфере – двух фундаментальных результатов трехмерной топологии и, что более важно, получили новый результат – так называемую теорему об эквивариантной петле. В сочетании с результатами Терстона, Басса и др. эта теорема позволила завершить доказательство гипотезы Смита – давнишней нерешенной проблемы о действиях группы $\mathbb{Z}_n$ на трехмерной сфере S^3 . В последние годы Фридман и Яу исследовали более общие групповые действия на S^3 , пользуясь техникой минимальных поверхностей. Недавно Алан Эдмундс дал чисто топологическое доказательство теоремы об эквивариантной петле. Однако для близкой к ней по духу теоремы Микса, Саймона и Яу,

утверждающей, что если трехмерное многообразие не имеет фальшивой клетки (которая являлась бы контрпримером к гипотезе Пуанкаре), то и его универсальное накрытие не содержит фальшивых клеток, пока не существует чисто топологического доказательства. Из всех геометрических приложений анализа к топологии теорема об эквивариантной петле и ее следствия в топологии трехмерных многообразий теснее всего связаны с теоремой Дональдсона в топологии четырехмерных многообразий. Поэтому неудивительно, что те же топологи, которые несколько лет назад занимались минимальными поверхностями в трехмерных многообразиях, теперь изучают уравнения Янга – Миллса на четырехмерных многообразиях.

Даже имея возможность наблюдать временную эволюцию приложений анализа к топологии, трудно найти в них какие-то общие закономерности и рискованно делать какие-либо предсказания на будущее. К тому же в своем кратком историческом обзоре мы совсем не касались приложений дифференциальных уравнений в частных производных к геометрии и топологии комплексных многообразий, которые еще более многочисленны, чем приложения к гладким вещественным многообразиям. Например, обобщенный вариант автодуальных уравнений, использованных Дональдсоном, применяется при изучении стабильных голоморфных векторных расслоений над комплексными кэлеровыми многообразиями.

Теорию Янга – Миллса можно рассматривать как нелинейное обобщение теории Ходжа. Рассмотрим четырехмерное риманово многообразие M и фиксируем над ним некоторое векторное расслоение η . Поставим вариационную задачу для связностей D в расслоении η , взяв в качестве функционала действия энергию (иначе говоря, L^2 -норму) кривизны F_D :

$$(5) \quad \mathcal{YM}(D) = \int_M |F_D|^2.$$

Критические точки этого функционала Янга – Миллса удовлетворяют уравнениям Эйлера – Лагранжа

$$(6) \quad D^* F_D = 0,$$

нелинейным обобщениям уравнений (2). (Напомним, что кривизна F_D квадратично выражается через связность D , так что не-

линейность в (6) является слабой.) В силу тождества Бьянки $DF_D = 0$ мы получаем также уравнение типа уравнения Лапласа:

$$(DD^* + D^*D)F_D = 0.$$

Уравнения Янга – Миллса второго порядка (6) автоматически удовлетворяются, если подставить в них решения уравнений первого порядка, дающие абсолютный минимум функционала (5). Эти уравнения имеют вид

$$(7) \quad *F_D = \pm F_D$$

и называются автодуальными (соответственно антиавтодуальными).

Сформулированная выше теорема Дональдсона дает сильные ограничения на топологическое строение компактного односвязного гладкого четырехмерного многообразия M . Она доказывается путем изучения решений нелинейной системы полуэллиптических уравнений (7). Операторы, входящие в эти уравнения, представляют собой нелинейные обобщения описанного ранее скрученного оператора Дирака и являются спецификой размерности 4. Пространство решений системы (7) разбивается на классы относительно некоторого естественного отношения эквивалентности; в результате получается так называемое пространство модулей $\mathcal{M}$. Подобно случаю линейных эллиптических систем, мы исследуем топологию многообразия M путем изучения геометрии пространства решений, только теперь эта геометрия несравненно богаче – ведь в линейном случае решения образуют векторное пространство и его геометрия полностью определяется размерностью. Грубо говоря, в случае автодуальных уравнений пространство модулей $\mathcal{M}$ представляет собой ориентированное пятимерное многообразие с краем M и с конечным числом особых точек, причем окрестности этих точек являются конусами над комплексной проективной плоскостью $\mathbb{C}P^2$. Вырезав окрестности этих точек, мы получаем кобордизм между M и несвязным объединением нескольких экземпляров $\mathbb{C}P^2$. Наличие такого кобордизма вместе с инвариантностью сигнатуры позволяет завершить доказательство теоремы Дональдсона.

Замечательно, как в доказательстве теоремы Дональдсона используется малейшая топологическая информация о многообразии M ! Положительность формы пересечений необходима для теоремы Таубса о существовании автодуальных связностей. Доказательство ориентируемости пространства модулей $\mathcal{M}$ и тот факт, что $\dim \mathcal{M} = 5$, основаны на обращении в нуль первого числа Бетти многообразия M . Каждый из концов $\mathcal{M}$ имеет вид $\mathbb{R} \times M$, и именно условие $\pi_1(M) = 0$ обеспечивает, что у $\mathcal{M}$ ровно один конец. Доказательство проходит точно при поставленных предположениях и не проходит ни при каких других.

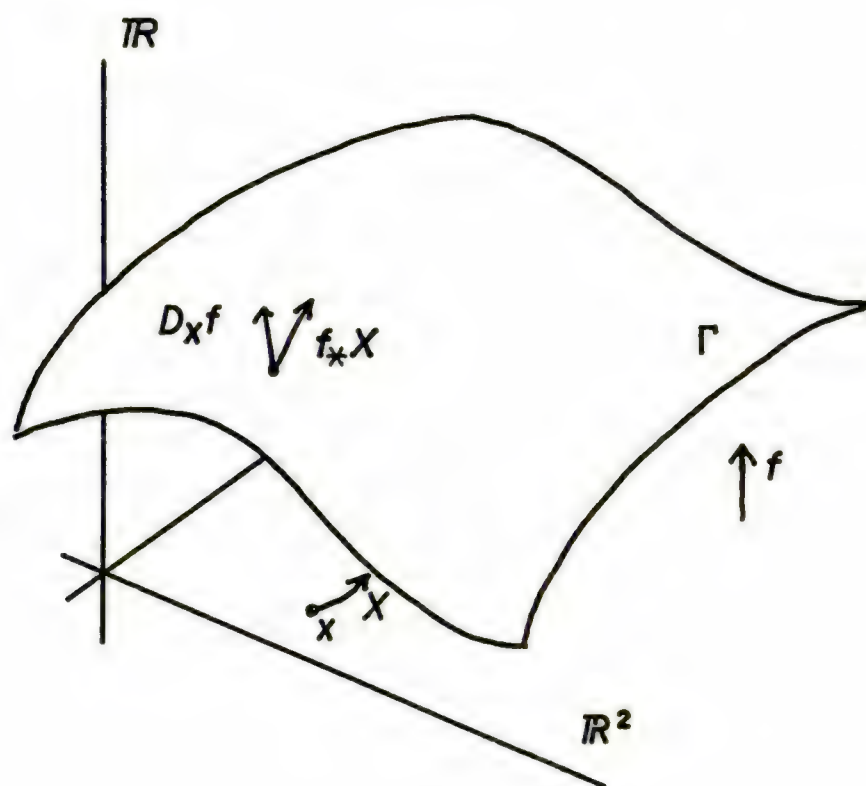
Благодаря такой прекрасной гармонии между анализом и топологией направления обобщений теоремы Дональдсона весьма ограничены, хотя и можно исследовать четырехмерные многообразия с точечными особенностями или с краем. В любом случае все указывает на то, что калибровочные поля приобрели права гражданства и в физике, и в математике. Кроме обсуждаемых здесь вопросов имеется еще целый ряд совсем других ситуаций, в которых они появляются в математике. Прежде всего существует интересная связь между алгебраическим твисторным описанием автодуальных полей на автодуальных четырехмерных многообразиях и нелинейным анализом. С одной стороны, пространство модулей $\mathcal{M}$ можно изучать средствами алгебраической геометрии, кватернионной линейной алгебры и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В то же время голоморфные расслоения над комплексными кэлеровыми многообразиями любых размерностей исследуются с использованием обобщенных автодуальных уравнений. Атья и Ботт изучили с этих позиций топологию пространства модулей стабильных векторных расслоений над римановыми поверхностями. Трехмерные уравнения Янга – Миллса пока остаются загадкой. Хотя абстрактные теоремы существования гарантируют наличие решений, их геометрический смысл еще не ясен. И, наконец, представляют интерес сами уравнения Янга – Миллса, особенно в сочетании с «внешними полями материи» (уравнения Янга – Миллса – Хигса). Они привлекательны не только физической мотивировкой, но и богатым геометрическим и топологическим содержанием.

Так как в нашем изложении используются три обширные области математики – топология, геометрия и анализ, то, чтобы

облегчить труд читателя, мы всюду, где это было возможно, старались давать необходимый подготовительный материал. Следующий краткий обзор содержания призван служить путеводителем по книге.

В гл. 1 мы рассматриваем топологические и гладкие четырехмерные многообразия. Даны три эквивалентных определения формы пересечений. В конце главы приведен набросок принадлежащего М. Фридману доказательства существования фальшивого пространства $\mathbb{R}^4$.

Глава 2 содержит основные сведения из геометрии калибровочных полей. Для того чтобы получить конкретные формулы, мы работаем с векторными расслоениями вместо главных расслоений. Возможно, при этом теряется геометрическая наглядность, поэтому мы дадим здесь, во введении, геометрическое описание ковариантной производной. Рассмотрим простейший случай вещественнозначной функции f на $\mathbb{R}^2$. Один из основных принципов современной дифференциальной геометрии состоит в том, что мы постигаем свойства функций (или сечений расслоений), изучая геометрию их графиков. В свете этого принципа производная $D_X f$ функции f по направлению векторного поля X вычисляется следующим образом. Поднимем X до касательного векторного поля $f_* X$ к графику $\Gamma = \text{graph } f$. Тогда вертикальная часть поля $f_* X$ измеряет скорость изменения функции f в направлении X .



Отождествляя касательное пространство к прямой $\mathbb{R}$ с самой этой прямой, мы получаем $D_X \not\equiv 0$. В этом примере вертикальная проекция, задаваемая указанием ее ядра — горизонтального подпространства в точке $\not\equiv(x)$, — канонически определяется структурой прямого произведения $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Однако над топологически нетривиальными многообразиями существуют векторные расслоения, не являющиеся прямыми произведениями, и тогда горизонтальное распределение, или связность, представляет собой дополнительную часть геометрических данных. Препятствием к существованию локального базиса из плоских сечений является кривизна этой связности, а ее глобальные свойства отражают степень скрученности расслоения.

Мы изучаем связности, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений Янга — Миллса. Множество всех связностей в расслоении образует аффинное пространство $\mathcal{A}$ (разность двух связностей представляет собой тензорное поле на базе). На этом пространстве определено естественное действие группы $\mathcal{G}$ автоморфизмов расслоения. Уравнения Янга — Миллса инвариантны относительно этого действия, поэтому наше пространство модулей $\mathcal{M}$ является подмножеством в пространстве орбит $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. В конце гл. 2 мы доказываем теорему Дональдсона, опираясь на топологические свойства пространства $\mathcal{M}$, которые устанавливаются в последующих главах.

Для типичной метрики на многообразии M пространство модулей $\mathcal{M}$ является гладким пятимерным многообразием с конечным числом особых точек. Доказательству этого факта посвящены главы 3 и 4. Используемый нами подход отличается от подхода Дональдсона. Возмущение пространства модулей $\mathcal{M}$ у Дональдсона не индуцировано возмущением метрики, и его более абстрактная постановка несколько упрощает его доказательство. Наши рассуждения немного сложнее, зато полученное нами возмущенное пространство модулей по-прежнему является пространством решений уравнений Янга — Миллса, только теперь для возмущенной метрики на базе. В обоих подходах для построения возмущений применяется теорема Сарда — Смейла. В гл. 3 мы изучаем неприводимые связности. Приводимым связностям соответствуют особые точки пространства модулей $\mathcal{M}$, и вблизи этих точек $\mathcal{M}$ выглядит как конус над $\mathbb{C}P^2$. В гл. 4 мы переделываем теорему

типичности, принимая во внимание дополнительную симметрию, доставляемую группой голономии S^1 приводимой связности.

Глава 5 посвящена в основном топологическим вопросам. В ней мы определяем индексное расслоение для нашего нелинейного аналога эллиптического комплекса (4), являющееся расширением касательного расслоения $T\mathcal{M}$. Его существование позволяет вывести ориентируемость многообразия $\mathcal{M}$ из односвязности пространства орбит $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, которая в свою очередь следует из связности группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}$. Оказывается, что группа путей $\pi_0(\mathcal{G})$ есть не что иное, как множество гомотопических классов $[M, S^3]$. Это следует из классификационной теоремы Стиррода. Более геометрическое доказательство, основанное на конструкции Понтрягина, дано в приложении В.

Глава 6 представляет собой причудливую смесь анализа и геометрии. Она содержит подготовительный материал, необходимый для доказательства теоремы Таубса о существовании автодуальных связностей, а также фрагмент самого доказательства — так называемую процедуру прививки. Мы начинаем с геометрического описания пространства модулей инстантонов на четырехмерной сфере S^4 , подчеркивая при этом роль конформной группы, которая сохраняет уравнения Янга — Миллса и транзитивно действует на S^4 . Инстантоны на S^4 можно локализовать с помощью гомотетии. Остроумная идея Таубса состоит в том, чтобы перенести («привить») эти локализованные инстантоны на многообразие M . Описав процедуру прививки, мы возвращаемся к разработке аналитической техники, которая используется при доказательстве теоремы Таубса.

В гл. 7 на первый план выступает анализ. Новшеством здесь является процесс раздутия метрики, позволяющий компенсировать особенности формы кривизны. (Заметим, что этой техникой можно пользоваться для устранения особенностей и во многих других задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных.) Однако ничто в этом мире не дается даром, поэтому за компенсацию особенностей кривизны мы вынуждены платить тем, что теперь нам приходится иметь дело с некомпактным многообразием. К счастью, мы в состоянии контролировать процесс раздутия и, следовательно, появившуюся некомпактность. Это находит отражение в аналитических оценках, с помощью которых мы успешно завершаем доказательство теоремы Таубса. Кроме того, здесь

доказывается локальная связность пространства модулей, которая понадобится позже. Работая с раздутыми некомпактными многообразиями, мы получаем более простое доказательство, чем у Дональдсона. Кстати, это и было стимулом получения другого доказательства теоремы Таубса.

Компактность пространства модулей доказывается в гл. 8. Вначале мы показываем, что решения автодуальных уравнений регулярны. Это выводится из теоремы регулярности, справедливой для произвольных нелинейных эллиптических уравнений. Чтобы получить доказательство компактности, мы используем вытекающее из общих свойств дифференциальных уравнений каноническое локальное расщепление действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве связностей — так называемую калибровку Кулона. Теорема компактности получается при помощи леммы о выборе калибровки и техники склеивания, которые мы не включили, так как не смогли улучшить опубликованных доказательств. В гл. 8 содержится также длинный технический рецепт для измерения степени концентрации кривизны локализованных инстантонов, который имеет решающее значение в гл. 9 при доказательстве теоремы о воротнике. В самом деле, отображение $\overline{\mathcal{B}}$, указывающее центр и масштаб инстантона, задает воротник многообразия M в пространстве модулей. В качестве премии мы получаем некоторые оценки для локализованных инстантонов.

Глава 9 посвящена теореме о воротнике. Мы придерживаемся оригинального доказательства Дональдсона с некоторыми упрощениями, которые получаются за счет использования раздутого многообразия M . В первом разделе мы продолжаем изучать структуру локализованных инстантонов, на сей раз в кольцевой области вблизи центра. При этом получают так называемые оценки распада инстантона. Они используются в теореме о воротнике и, кроме того, дают новое очень короткое доказательство теоремы об устранении особенностей, которое приведено полностью в приложении D. Как всегда, мы интерпретируем воротник по аналогии с локализованными инстантонами на S^4 ; отсюда без труда следует, что пятимерное касательное расслоение в локализованном инстантоне состоит из инфинитезимальных почти конформных деформаций. Другими словами, отображение $\overline{\mathcal{B}}$, сопоставляющее инстантону центр и масштаб, является локальным

дiffeоморфизмом. Комбинируя этот результат с теоремой компактности из гл.8, мы заключаем, что $\overline{\mathcal{B}}$ – конечнолистное покрывающее отображение. Доказательство того, что отображение $\overline{\mathcal{B}}$ взаимно однозначно, требует привлечения экспоненциальных калибровок; мы описываем их во всех деталях. Наконец, сведя вместе полученные нами оценки и призвав на помощь локальную связность пространства модулей, установленную в гл.7, мы завершаем доказательство теоремы о воротнике.

Топологи Финтушел и Стерн получили новое доказательство ряда частных случаев теоремы Дональдсона. Хотя их методы применимы не ко всем формам пересечений, они годятся для многообразий с нетривиальной фундаментальной группой. В их подходе $SU(2)$ -расслоение, которое использовал Дональдсон, заменяется соответствующим $SO(3)$ -расслоением. В результате пространство модулей инстантов для такого расслоения компактно и одномерно, что позволяет заменить построение кобордизма и сигнатурные вычисления простым подсчетом граничных точек. Техника Финтушела и Стерна изложена в гл. 10.

В книге имеется пять приложений. Первое содержит некоторые аналитические понятия и конструкции, связанные с пространствами Соболева. Мы вынесли их в отдельное приложение, чтобы не отягощать и без того не простую гл. 3. В приложение В включено изящное геометрическое вычисление множества гомотопических классов $[M, S^3]$. Приложение С посвящено выводу формул Вейтценбёка; при этом мы старательно подчеркивали роль ортогональной группы. По существу, наш подход представляет собой основанные на ортогональной инвариантности вычисления в нормальных геодезических координатах. В качестве противоядия этому абстрактному подходу мы выводим одну из формул Вейтценбёка с помощью метода подвижного репера. Коэффициенты в этой формуле играют решающую роль при получении оценок распада инстанта в гл. 9. Как уже упоминалось, приложение D содержит основанное на этих оценках короткое доказательство теоремы об устранении особенностей. В приложении E собраны различные топологические результаты, включая классификацию $U(1)$ -, $SU(2)$ - и $SO(3)$ -расслоений.

ГЛОССАРИЙ

Инвариант Кёри – Зибенманна и теория сглаживания. Обозначим через DIFF_n группу диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, через PL_n – группу обратимых кусочно-линейных отображений $\mathbb{R}^n$ и через TOP_n – группу гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$. Тогда имеют место очевидные включения

$$\text{DIFF}_1 \subset \text{DIFF}_2 \subset \dots \subset \text{DIFF}_n \subset \dots,$$

$$\text{PL}_1 \subset \text{PL}_2 \subset \dots \subset \text{PL}_n \subset \dots,$$

$$\text{TOP}_1 \subset \text{TOP}_2 \subset \dots \subset \text{TOP}_n \subset \dots,$$

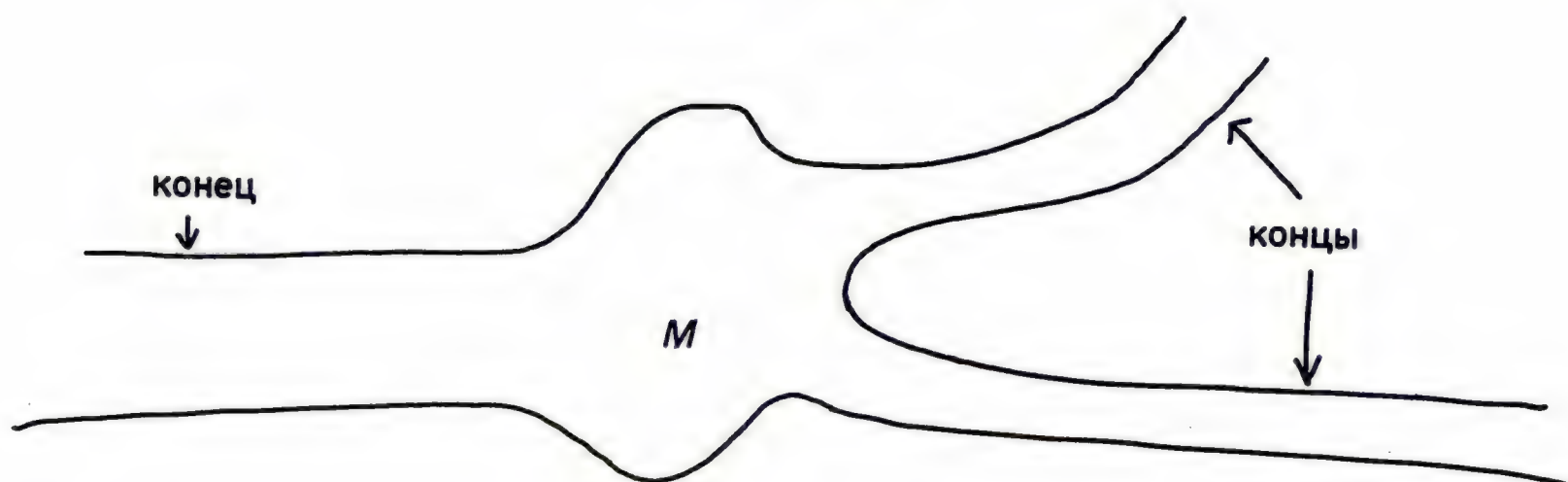
позволяющие определить предельные группы DIFF , PL и TOP . (Здесь используется та же конструкция, что и для групп Ли. Более того, стабильная ортогональная группа O гомотопически эквивалентна DIFF .) Как и группы Ли, топологические группы DIFF , PL и TOP обладают классифицирующими пространствами (см. приложение Е), которые обозначаются BDIFF , BPL и BTOP . Эти пространства связаны цепочкой отображений $\text{BDIFF} \rightarrow \text{BPL} \rightarrow \text{BTOP}$ в соответствии с тем нетривиальным обстоятельством, что каждое гладкое многообразие наделено кусочно-линейной структурой, а соответствующее PL -многообразие в свою очередь является топологическим. С топологическим многообразием M связано топологическое касательное расслоение. Оно представляется отображением $\tau: M \rightarrow \text{BTOP}$, и можно ожидать, что поднятиям τ в пространство BPL (соответственно в BDIFF) отвечают PL -структуры (соответственно гладкие структуры) на M . И действительно, как утверждает

основная теорема теории сглаживания, такое соответствие имеет место в размерностях $n \geq 5$, если $\partial M = \emptyset$, и в размерностях $n \geq 6$ в противном случае. Точнее, эта теорема утверждает, что гомотопическим классам поднятий соответствуют изотопические классы PL (или DIFF)-структур. Таким образом, теория сглаживания в указанных размерностях сводится к теории препятствий. Превратим отображение $BPL \rightarrow BTOP$ в расслоение и обозначим его слой через TOP/PL . В 1969 г. Кёрби и Зибенманн установили, что единственной нетривиальной гомотопической группой этого слоя является группа $\pi_3(TOP/PL) = \mathbb{Z}_2$. Образ универсального препятствия из $H^4(BTOP; \pi_3(TOP/PL))$ при гомоморфизме $\tau^*: H^4(BTOP; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ и есть инвариант Кёрби – Зибенманна $\alpha(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}_2)$. Препятствия к сглаживанию PL-многообразия проистекают из гомотопических групп $\pi_m(PL/DIFF) = \oplus_m$ ($m \geq 5$), где $\oplus_m$ – группа Кервера – Милнора классов изоморфных гладких ориентированных гомотопических m -мерных сфер. Приведем несколько первых значений:

m	5	6	7	8	9	10	11
$\oplus_m$	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{392}$

Теория сглаживания в размерности 4 разработана не полностью; большим шагом вперед стала теорема Дональдсона. В то же время Серф [Се] доказал, что каждое четырехмерное PL-многообразие может быть наделено единственной согласованной гладкой структурой. В размерностях $n = 1, 2$ и 3 все топологические многообразия сглаживаемы единственным образом [Мо]. Основным источником по теории сглаживания, включающим обширную библиографию, является монография Кёрби и Зибенманна [KS].

Конец. Грубо говоря, концы многообразия M – это те его части, которые уходят в бесконечность. Более формально, семейство $\{M \setminus K\}$ дополнений к компактным подмножествам $K \subseteq M$ направлено по вложению, и множество концов – это проективный предел данного направленного множества [St2, с.3].



PL-многообразие. Вначале определим понятие PL-отображения. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытые множества и $f: U \rightarrow V$ – непрерывное отображение. Тогда f называется PL-отображением, если существует подразделение стандартной прямолинейной триангуляции множеств U и V , для которого f линейно на каждом симплексе. Топологическое многообразие M обладает PL-структурой, если на нем существует такой атлас, функции перехода которого являются PL-отображениями (ср. с данным в гл. I определением гладкого многообразия).

Оператор Дирака. Это основной дифференциальный оператор на спинорном многообразии. В четных размерностях оператор Дирака представляет собой оператор первого порядка $\not{D}: C^\infty(S^+) \rightarrow C^\infty(S^-)$, действующий в сечениях полуспинорных расслоений. Комплекс (4) на четырехмерных многообразиях получается тензорным умножением $\not{D}$ на S^- ; это дает оператор $\not{D}_{S^-}: C^\infty(S^+ \otimes S^-) \rightarrow C^\infty(S^- \otimes S^-)$. Подробное описание свойств оператора Дирака см. в работе [ANS].

Теорема Рохлина. Топологическое доказательство этой теоремы, построенное в соответствии с первоначальными идеями Рохлина, содержится в работе [FK].

Теория Морса. Классическим руководством по этой теории является книга Милнора [M5].

Топологическое спинорное многообразие. Это просто многообразие, у которого первые два класса Штифеля – Уитни равны нулю. (Классы Штифеля – Уитни топологического многообразия определяются с помощью квадратов Стинрода [Sp, § 6.10], [MS, § 8].)

Топология трехмерных многообразий и минимальные поверхности.

Три основные теоремы топологии трехмерных многообразий – лемма Дена, теорема о петле и теорема о сфере – были доказаны в 1957 г. Папакирьякопулосом (Ден сформулировал свой результат в 1910 г., но дал ошибочное доказательство). Пусть M – трехмерное многообразие с краем; в силу теории сглаживания можно считать это многообразие гладким. Лемма Дена утверждает, что жорданова кривая $\gamma \subset \partial M$, стягиваемая в M , ограничивает вложенный диск в M . Теорема о петле относится к случаю, когда вложенная кривая γ является негомотопной нулю петель в ∂M . В комбинации с леммой Дена получаем традиционную формулировку: если ядро гомоморфизма $\pi_1(\partial M) \rightarrow \pi_1(M)$ нетривиально, то в многообразии M существует вложенный диск, граница которого расположена в ∂M и представляет нетривиальный элемент этого ядра. Наконец, теорема о сфере утверждает, что в случае, когда многообразие M ориентируемо и $\pi_2(M) \neq 0$, в нем существует вложенная нестягиваемая двумерная сфера S^2 . Микс и Яу получили геометрические версии этих теорем для компактных многообразий. А именно, они доказали, что при подходящих метриках на M (которые всегда существуют) можно так выбрать вложенные диски в лемме Дена и в теореме о петле и вложенную сферу S^2 в теореме о сфере, что они будут иметь минимальную площадь. Более того, образы любых двух таких минимальных вложений либо совпадают, либо пересекаются только по границе (не пересекаются в теореме о сфере). Существуют эквивариантные формулировки этих теорем, приводящие к доказательству гипотезы Смита: если группа $\mathbb{Z}_n$ действует на S^3 с одномерным множеством неподвижных точек F , то F – незаузленная окружность. По топологии трехмерных многообразий можно обратиться к руководствам [He], [st2]; результаты, включающие минимальные поверхности, содержатся в работах [my1], [my2], [msy]. Отметим, что в обоих контекстах имеются более сильные формулировки трех основных теорем, теснее связанные с группами на многообразиях.

Эллиптическая теория. Доступное изложение теоремы Де Рама можно найти в книге [wa]. Книга Пале [P2] содержит основы теории фредгольмовых операторов, а также теорему Атьи – Зингера об индексе.

Глава 1

ФАЛЬШИВЫЕ $\mathbb{R}^4$

В этой главе дается обзор топологических идей, лежащих в основе доказательства существования «фальшивого» четырехмерного пространства $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$. Пространство $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$ отличается от стандартного гладкой структурой. После краткого обсуждения понятия гладкой структуры на многообразии мы описываем алгебраические инварианты, которые используются для классификации четырехмерных топологических многообразий. Не все четырехмерные многообразия допускают гладкую структуру; мы формулируем характерные результаты о несуществовании, включая теорему Дональдсона. Наконец, объединив все изложенное, мы даем набросок доказательства существования на $\mathbb{R}^4$ экзотической гладкой структуры. Другое изложение этого материала читатель сможет найти в работе [Fr2].

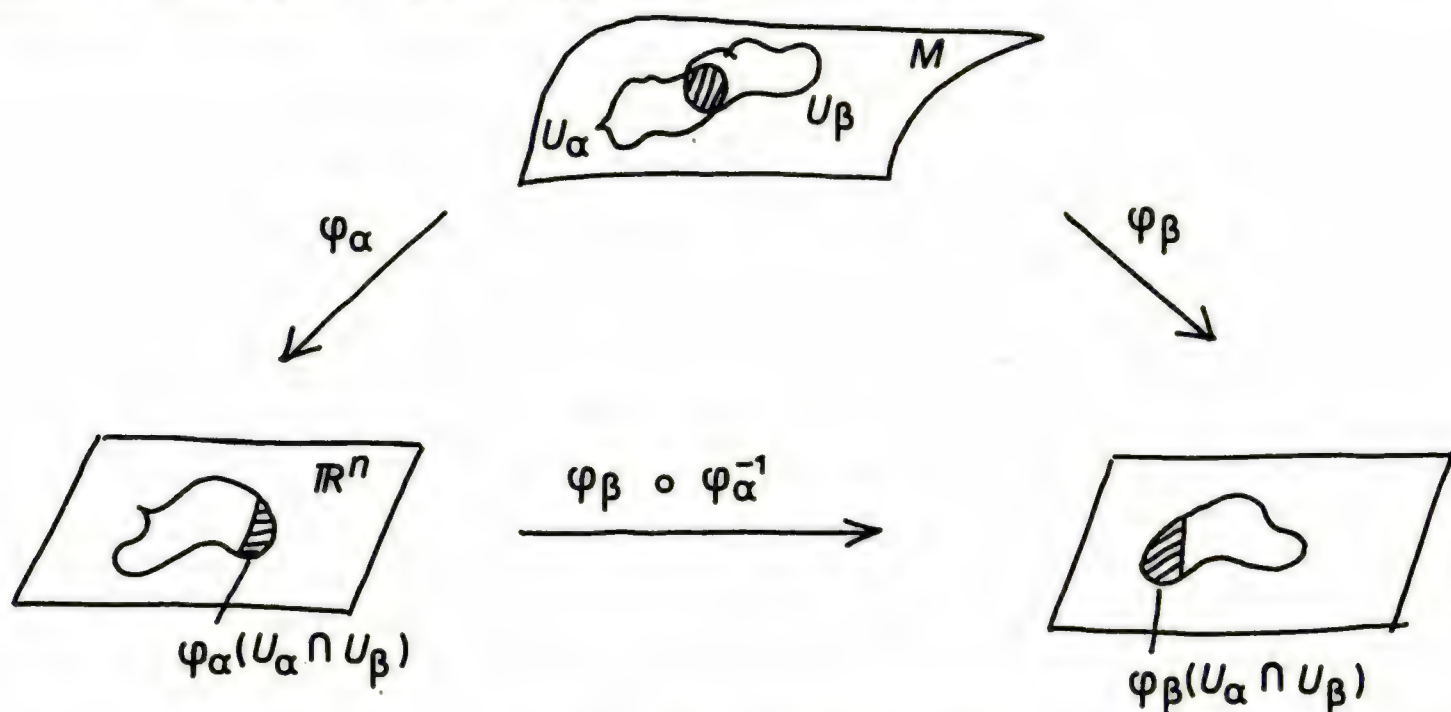
ГЛАДКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть M – топологическое многообразие размерности n . Это означает, что M является топологическим пространством, которое локально выглядит как обычное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. На многообразии M можно очевидным образом определить открытые множества и непрерывные функции, но нельзя дифференцировать. Введем дополнительную структуру, согласованную с топологией на M , которая позволит нам выделить в кольце всех непрерывных функций на M подкольцо гладких функций. Это делается с помощью гладко согласованного множества координатных карт. Тогда гладкая структура на M – это такое покрытие M открытыми множествами U_{α} , рассматриваемыми вместе с гомеоморфизмами

$\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, что функции перехода

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются гладкими. Для функций $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ понятие гладкости имеет смысл, поскольку $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а мы знаем, как дифференцировать отображения между такими множествами. Будем говорить, что $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, если для каждого U_α гладкими являются функции $f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$. Этим определяется кольцо гладких функций на M .



В качестве первого примера рассмотрим $M = \mathbb{R}^n$. Заметим снова, что дифференцирование здесь имеет смысл: достаточно вычислить предел отношения приращений. Покроем многообразие M одним открытым множеством ($U = M$) и возьмем в качестве φ тождественное отображение. Обозначим пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное этой гладкой структурой, через $\mathbb{R}_{\text{ст}}^n$. На $\mathbb{R}^n$ нетрудно построить и другие гладкие структуры. Например, возьмем $N = \mathbb{R}$, покроем его, как и прежде, одним открытым множеством, но теперь зададим $\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $\varphi(x) = x^{1/3}$. Заметим, что φ — гомеоморфизм. Очевидно, что φ определяет новое понятие гладкости на N — функция $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ является гладкой в новом смысле тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в смысле классического определения. Например, гладкой на N будет функция $f(x) = x^{2/3}$, поскольку $f \circ \varphi^{-1}(y) = y^2$ гладкая в обычном

смысле. Таким образом, нам удалось определить на $\mathbb{R}$ другую гладкость. Но наша новая гладкость не слишком отличается от стандартной. В самом деле, отображение φ (рассматриваемое как отображение $N \rightarrow \mathbb{R}_{\text{ст}}$) является дiffeоморфизмом между N и $\mathbb{R}_{\text{ст}}$. Можно подумать, что более сложное покрытие пространства $\mathbb{R}$ многими координатными картами привело бы к совсем непохожей гладкой структуре. Однако это не так. Действительно, обозначим через X прямую $\mathbb{R}$ с некоторой гладкой структурой. Тогда разбиение единицы позволяет построить на X полную риманову метрику. Легко видеть, что экспоненциальное отображение $\exp: T_0 X \rightarrow X$ является диффеоморфизмом. Но $T_0 X$ (касательное пространство к X в начале координат) есть не что иное, как $\mathbb{R}_{\text{ст}}$. Поэтому X диффеоморфно $\mathbb{R}_{\text{ст}}$.

Таким образом, на вещественной прямой не существует экзотических гладких структур. Для более сложных пространств ситуация иная. В 1956 г. Дж. Милнор построил пример экзотической гладкой структуры на семимерной сфере S^7 [м1]. Затем были открыты экзотические структуры на сферах более высоких размерностей; классификация этих структур сведена к задачам гомотопической топологии [км2]. Естественно ожидать, что плоские пространства $\mathbb{R}^n$ являются более «послушными». И в самом деле, можно показать, что для $n \neq 4$ любая гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ эквивалентна стандартной [мо], [st]. В то же время имеет место следующий

У д и в и т е л ь н ы й ф а к т. На пространстве $\mathbb{R}^4$ существует экзотическая гладкая структура.

Существование пространства $\mathbb{R}_{\Phi}^4$ доказывается при помощи замечательной комбинации топологии, анализа и геометрии. С анализом и геометрией мы будем иметь дело позже; в этой главе обсуждаются некоторые топологические аспекты.

Для начала довольствуемся одним поразительным свойством пространства $\mathbb{R}_{\Phi}^4$, благодаря которому оно недиффеоморфно $\mathbb{R}_{\text{ст}}^4$.

(1.1) В пространстве $\mathbb{R}_{\Phi}^4$ существует компактное множество C , которое нельзя окружить никакой гладко вложенной трехмерной сферой.

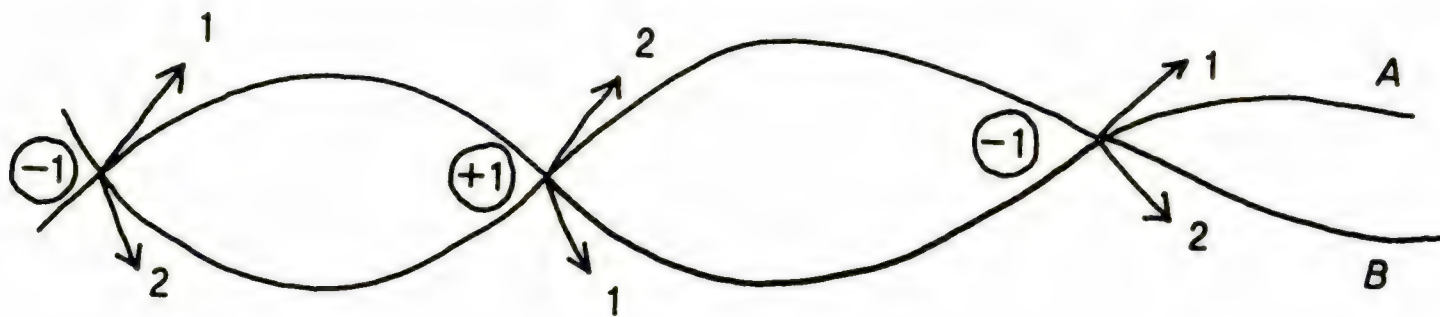
Разумеется, в $\mathbb{R}_{\text{ст}}^4$ существуют произвольно большие гладкие трехмерные сферы. Кроме того, поскольку $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$ гомеоморфно обычному пространству $\mathbb{R}^4$, в $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$ существуют произвольно большие непрерывно вложенные трехмерные сферы. (Чтобы построить такие сферы, выберем в $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$ какую-нибудь норму и рассмотрим множества $\{x \in \mathbb{R}_{\text{ф}}^4: \|x\| = R\}$ для больших R .) Поэтому в гладком многообразии $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$ сферы вблизи бесконечности очень «зазубрены».

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Всюду в этом параграфе через M будет обозначаться компактное односвязное четырехмерное топологическое многообразие. В частности, многообразие M ориентируемо; раз и навсегда фиксируем на нем определенную ориентацию. На двумерных целочисленных гомологиях $H_2(M; \mathbb{Z})$ многообразия M построим симметрическую билинейную форму. Допустим, что элементы $\alpha, \beta \in H_2(M; \mathbb{Z})$ представляются трансверсально пересекающимися ориентированными поверхностями A, B в M . (Этого всегда возможно добиться, если M — гладкое многообразие; см. (Е9) в приложении Е. Для топологических многообразий требуется видоизменить определение; это будет сделано в следующем параграфе.) Положим

$$\omega(\alpha, \beta) = A \cdot B,$$

где через $A \cdot B$ обозначен индекс пересечения ориентированных циклов A и B . Поскольку оба цикла A и B двумерны, форма ω является симметрической. Кроме того, в силу двойственности Пуанкаре форма ω унимодулярна, т.е. любая представляющая ее матрица имеет определитель, равный ± 1 .



Двойственность Пуанкаре позволяет отождествить группу гомологий $H_2(M; \mathbb{Z})$ с группой когомологий $H^2(M; \mathbb{Z})$ и, следовательно, определить форму ω как спаривание $H^2(M; \mathbb{Z}) \otimes H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Если $\alpha, \beta \in H^2(M; \mathbb{Z})$ и $[M] \in H_4(M; \mathbb{Z})$ — фундаментальный класс многообразия M , заданный ориентацией, то ω определяется по правилу

$$\omega(\alpha, \beta) = (\alpha \cup \beta)[M].$$

Здесь $\cup: H^2(M; \mathbb{Z}) \otimes H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(M; \mathbb{Z})$ обозначает $\cup$ -умножение в когомологиях; в нашем случае оно коммутативно.

Когда многообразие M обладает гладкой структурой, форму ω можно определить третьим способом, используя когомологии Де Рама $H_{DR}^*(M)$. Предположим, что элементы $\alpha, \beta \in H_{DR}^2(M)$ представлены 2-формами, которые мы также обозначим через α и β . Тогда

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Каким бы способом мы ее ни определили, форма ω называется формой пересечений и является основным инвариантом компактного четырехмерного многообразия. В 1949 г. Уайтхед [W] показал, что гомотопический тип компактного односвязного четырехмерного многообразия определяется классом изоморфизма формы ω (см. [M2]). В 1981 г. этот результат был превзойден М.Фридманом, который классифицировал компактные односвязные четырехмерные многообразия с точностью до гомеоморфизма [Fr].

П р и м е р ы

1. $M = S^4$. Так как $H_2(S^4; \mathbb{Z}) = H^2(S^4; \mathbb{Z}) = 0$, то $\omega = \emptyset$.
2. $M = S^2 \times S^2$. В этом случае группа $H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ порождается циклами $\alpha = S^2 \times pt$ и $\beta = pt \times S^2$. Здесь через pt обозначена точка из S^2 . Матрица формы ω в базисе $\{\alpha, \beta\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $M = \mathbb{C}P^2$. Группа $H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ имеет одну образующую, и матрицей формы ω является матрица (1) .

4. $M = K = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 : (z_0)^4 + (z_1)^4 + (z_2)^4 + (z_3)^4 = 0\}$. Это так называемая поверхность Куммера. Используя характеристические классы, можно показать [M2], что форма ω представляется матрицей

$$-E_8 \oplus -E_8 \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — это форма пересечений многообразия $S^2 \times S^2$,

а E_8 — матрица Картана исключительной алгебры Ли e_8 .

Полезно кое-что знать об унимодулярных симметрических билинейных формах ω над целыми числами. Ранг $r(\omega)$ формы ω — это размерность пространства, на котором она определена (в нашем случае $\dim H_2(M; \mathbb{Z})$). Сигнатура $b(\omega)$ — это число положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений ω , рассматриваемой как вещественная форма. Еще одной важной характеристикой унимодулярной целочисленной формы является ее тип: форма ω называется четной,

если четны все диагональные элементы (эквивалентно, $\omega(\alpha, \alpha) \in 2\mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$); в противном случае форма ω называется нечетной. Ранг, сигнатура и тип образуют полную систему инвариантов для (знако)неопределенных унимодулярных симметрических форм [М2], [НМ, с.37 рус.перев.]. Классификация положительно определенных унимодулярных форм значительно труднее. Классическая теорема, принадлежащая Эйзенштейну и Эрмиту, утверждает, что существует лишь конечное число классов изоморфных положительно определенных унимодулярных форм данного ранга. Не все комбинации ранга, сигнатуры и типа реализуются; это относится как к знакоопределенным, так и к неопределенным формам. Наиболее важным нетривиальным ограничением является тот факт, что если форма ω четна, то $b(\omega)$ делится на 8. В этой связи заметим, что $b(E_8) = 8$. Можно показать, что E_8 — единственная положительно определенная четная форма ранга 8. Насколько быстро растет количество знакоопределенных форм в зависимости от ранга, видно из следующей статистики: существуют две четные положительно определенные формы ранга 16, 24 формы ранга 24 и более чем 10^{51} форм ранга 40 !

Кроме инвариантов унимодулярных целочисленных форм в классификации Фридмана участвует препятствие Кёрби — Зибенманна $\alpha(M) \in \mathbb{Z}_2$. Проще всего это препятствие может быть описано так: $\alpha(M) = 0$, если $M \times S^1$ сглаживаемо, и $\alpha(M) = 1$, если $M \times S^1$ несглаживаемо ($M \times S^1$ является пятимерным многообразием, а в размерностях 5 и выше существует хорошо разработанная теория сглаживания). Тогда имеет место следующая

К л а с с и ф и к а ц и я (по Фридману). Компактные одно-
связные топологические четырехмерные многообразия находятся во
взаимно однозначном соответствии с парами вида

$$\left\{ \langle \omega, \alpha \rangle : \frac{b(\omega)}{8} \equiv \alpha \pmod{2} \text{ для четных форм } \omega \right\}.$$

В частности, для любой квадратичной формы ω существует четырехмерное многообразие $|\omega|$, реализующее ω как форму пересечений. Если форма ω четна, то она однозначно определяет топологический тип многообразия $|\omega|$. Для нечетной формы ω существуют ровно два негомеоморфных многообразия $|\omega|$, реализующих ω . Между прочим, это утверждение

о единственности для пары $\langle \emptyset, 0 \rangle$ представляет собой четырехмерную гипотезу Пуанкаре в топологической категории. Отметим, что теорема Фридмана ничего не говорит о классификации гладких четырехмерных многообразий.

ГЛАДКИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Гладкие четырехмерные многообразия противятся классификации; по-видимому, наибольшие трудности, относящиеся к исследованию гладкости, сосредоточены как раз в размерности четыре. В более низких размерностях любое топологическое многообразие допускает единственную (с точностью до диффеоморфизма) гладкую структуру $[Mo]$, в размерностях выше четырех гладкие структуры соответствуют редукциям касательного расслоения $[ks]$. Предзнаменованием тех осложнений, которые возникают в размерности четыре, явился результат Рохлина 1952 г.

Т е о р е м а 1.2 (Рохлин [R]). Если гладкое односвязное компактное четырехмерное многообразие имеет четную форму пересечений ω , то $b(\omega)$ делится на 16.

Стоит отметить резкое отличие этой теоремы от результатов предыдущего параграфа. В самом деле, если $|\omega|$ — топологическое многообразие для четной формы ω , то $b(\omega)$ делится всего лишь на 8. Поэтому из теоремы Рохлина и классификации Фридмана вытекает, что $|E_8|$ существует как топологическое многообразие, но не существует как гладкое.

В некоторых редакциях теоремы Рохлина (см. $[FK]$, $[KM1]$) предположение о четности формы ω заменяется предположением о спинорности многообразия M , т.е. об обращении в нуль его второго класса Штифеля — Уитни w_2 . Если многообразие M односвязно, то эти предположения эквивалентны: $w_2 = 0$ тогда и только тогда, когда форма ω четна. Дадим набросок доказательства этого утверждения. Поскольку $\pi_1(M) = 0$, мы имеем $H_1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ (кстати, последним условием можно заменить предположение об односвязности), и теорема об универсальных коэффициентах для когомологий доставляет изоморфизм $H^2(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$. При этом изоморфизме

класс Штифеля – Уитни $w_2 \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ переходит в элемент из $\text{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$, значение которого на ориентированной поверхности $\Sigma \in M$ равно 0 или 1 в зависимости от того, тривиально или нет расслоение $TM|_{\Sigma}$. Но $TM|_{\Sigma} = \nu \oplus T\Sigma$, где ν – нормальное расслоение к Σ в M . Так как Σ – ориентированная поверхность, то расслоение $T\Sigma$ стабильно тривиально. Препятствием же к тривиализации нормального расслоения ν является эйлеров класс $\chi(\nu)$, равный индексу самопересечения поверхности Σ . Так как мы рассматриваем расслоение $\nu \oplus T\Sigma$, то можно редуцировать класс $\chi(\nu) \in H^2(\Sigma; \pi_1(SO(2))) = H^2(\Sigma; \mathbb{Z})$ к $\chi(\nu)_{\text{mod } 2} \in H^2(\Sigma; \pi_1(SO(4))) = H^2(\Sigma; \mathbb{Z}_2)$. А класс $\chi(\nu)_{\text{mod } 2}$ обращается в нуль в точности тогда, когда $\omega(\Sigma, \Sigma) \in 2\mathbb{Z}$.

Из теоремы Рохлина вытекает, что для многих четных форм ω не существует соответствующих им гладких многообразий $|\omega|$; в случае положительно определенных форм об этом говорит теорема Дональдсона.

Т е о р е м а 1.3 (Дональдсон). Многообразие $|\omega|$ не является гладким ни для какой ненулевой четной положительно определенной формы ω .

В частности, $|E_8 \oplus E_8|$ не является гладким многообразием. В то же время пример 4 из предыдущего параграфа показывает, что поверхность Куммера $K = |-E_8 \oplus -E_8 \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|$ – гладкое многообразие. Поскольку $S^2 \times S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ также является гладким многообразием (пример 2), хотелось бы с помощью хирургии на поверхности K удалить $|3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|$ и тем самым получить после обращения ориентации гладкое многообразие $|E_8 \oplus E_8|$. В следующем параграфе мы увидим, что такая хирургия невозможна. А из этого совершенно неожиданно будет следовать существование $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4$!

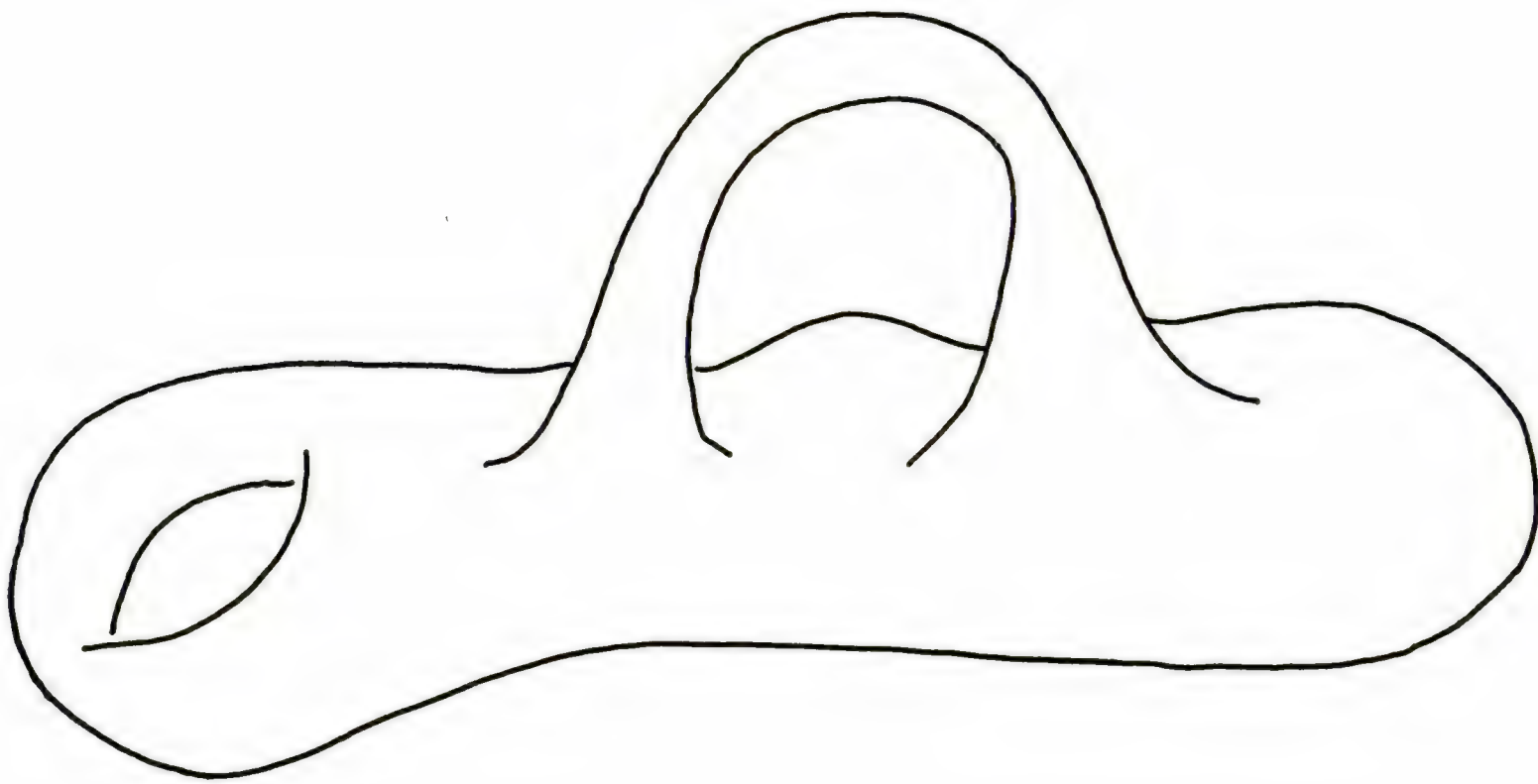
Мы завершим этот параграф формулировкой недавнего результата Квинна, который показал, что все компактные четырехмерные многообразия почти сглаживаемы, т.е. сглаживаемы в дополнении к любой

своей точке.

Т е о р е м а 1.4 (Квинн [Q]). Любое некомпактное четырехмерное многообразие сглаживаемо.

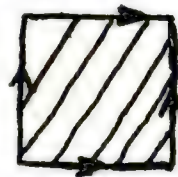
ХИРУРГИЧЕСКАЯ АНОМАЛИЯ

Прежде чем положить на операционный стол поверхность Куммера, вспомним, как с помощью ампутации ручек удаляются гомологии в простейшем случае римановой поверхности. Рассмотрим поверхность, у которой (антисимметрическая) форма пересечений ручки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для того чтобы удалить эти гомологии, мы выполняем одну из трех процедур.



1. Представляем гомологии вложенным проколотым тором $S^1 \times S^1 - D^2$. (Прокол D^2 делается там, где ручка соединяется с поверхностью.) Затем стягиваем в точку букет $S^1 \vee S^1 = (S^1 \times pt) \cup (pt \times S^1) \subset S^1 \times S^1$.

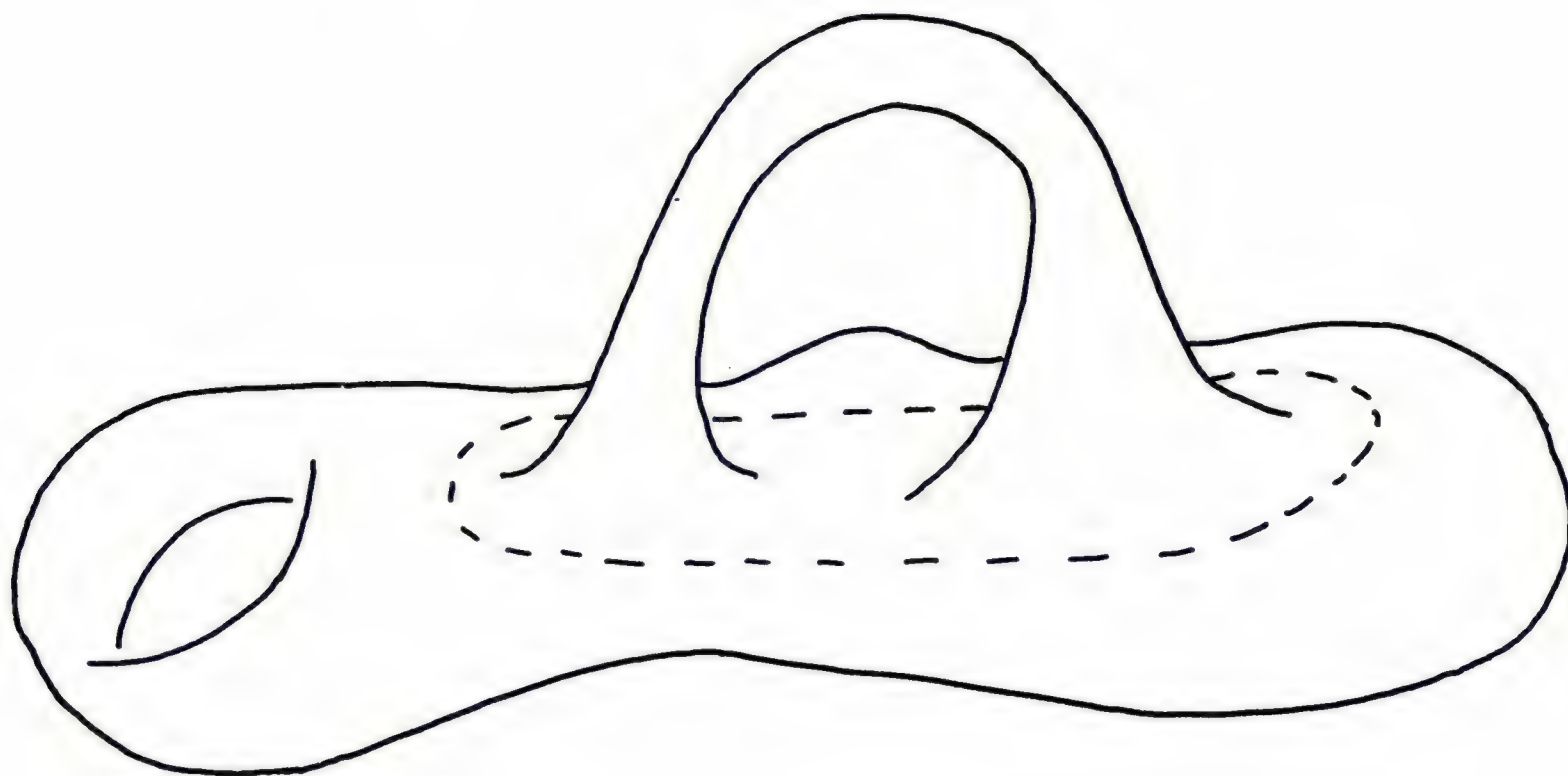
Тогда $(S^1 \times S^1) / (S^1 \vee S^1) = S^2$, поскольку квадрат



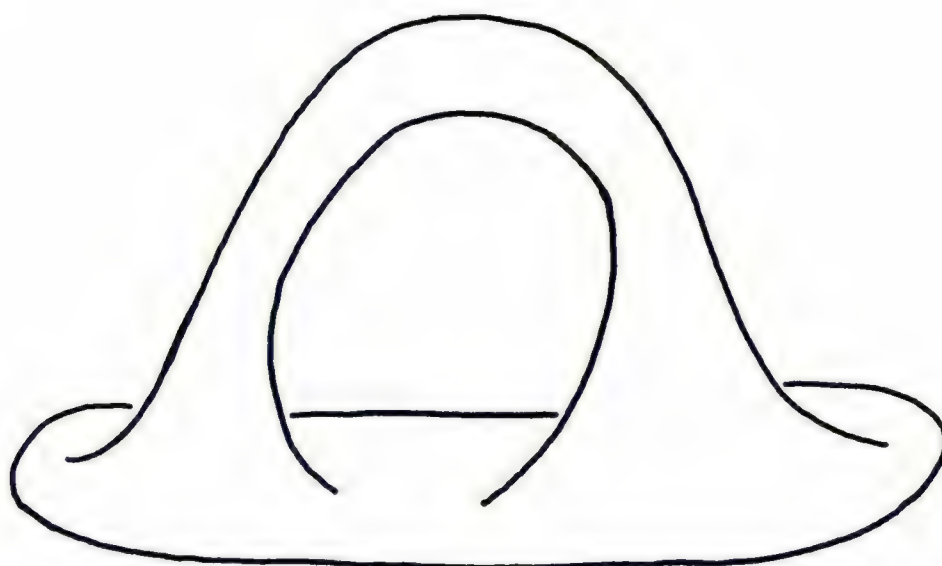
граница которого $\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$ стянута в точку, есть не что иное,



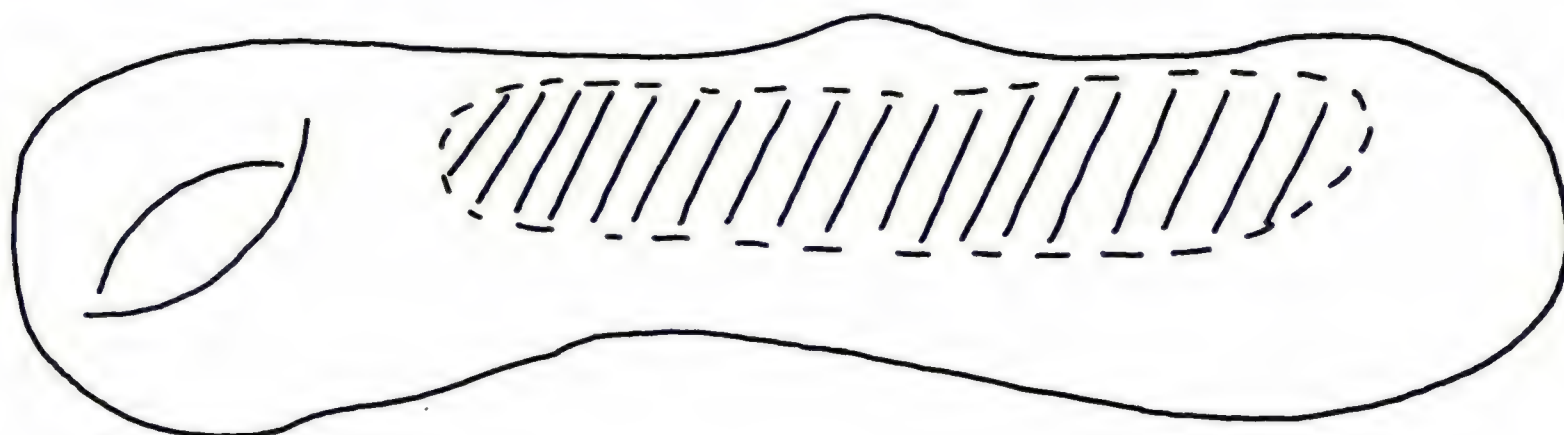
2. Находим окружность S^1 , окружающую ручку:



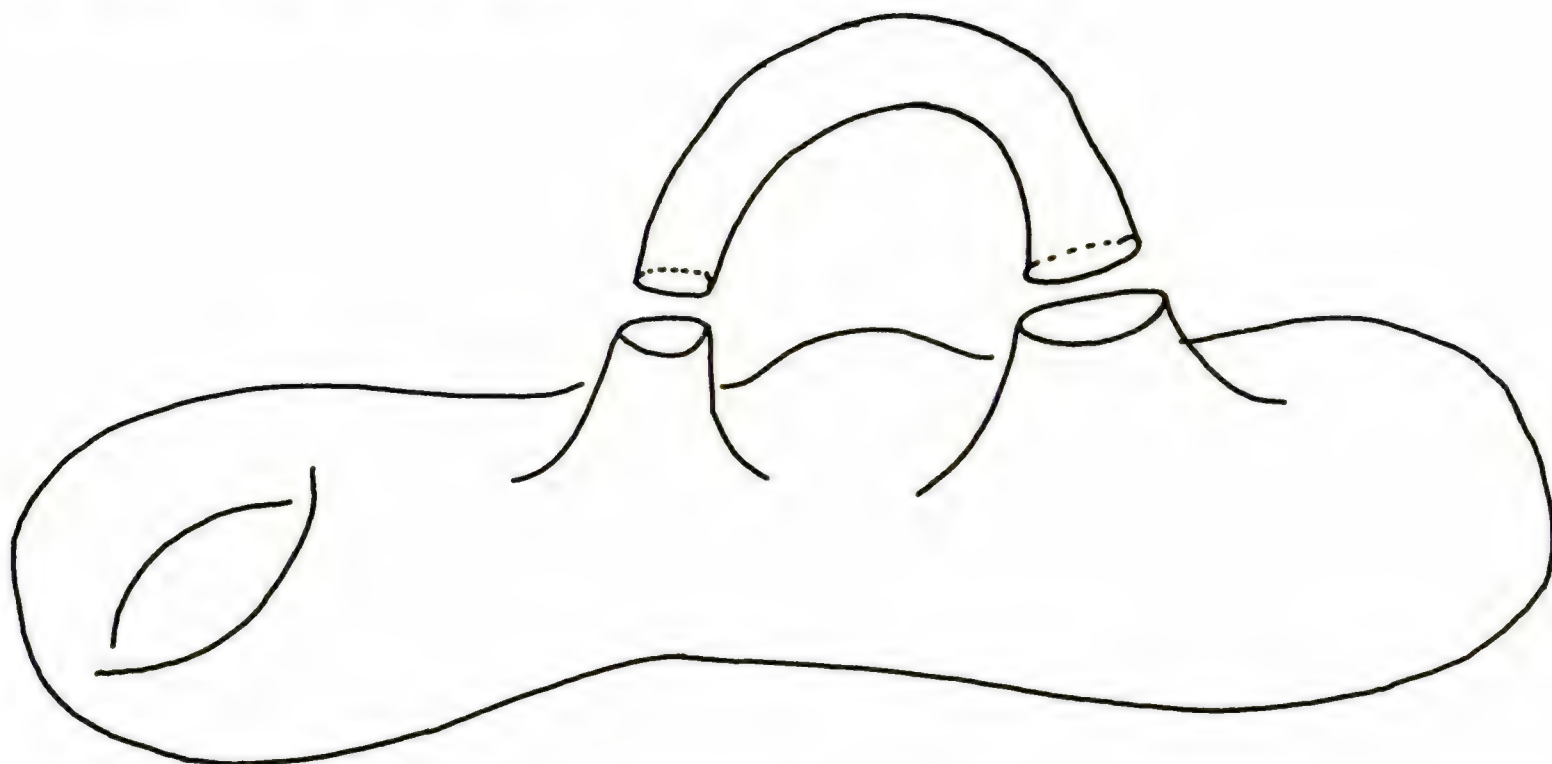
Вырезаем ручку:



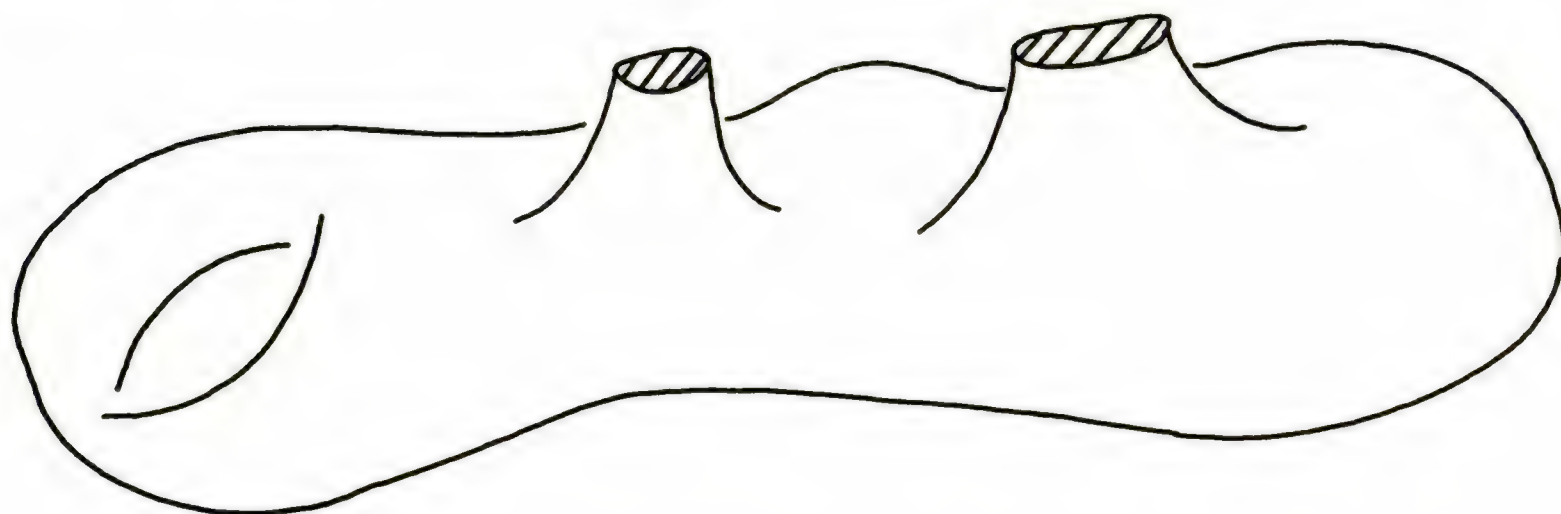
И заклеиваем поверхность диском:



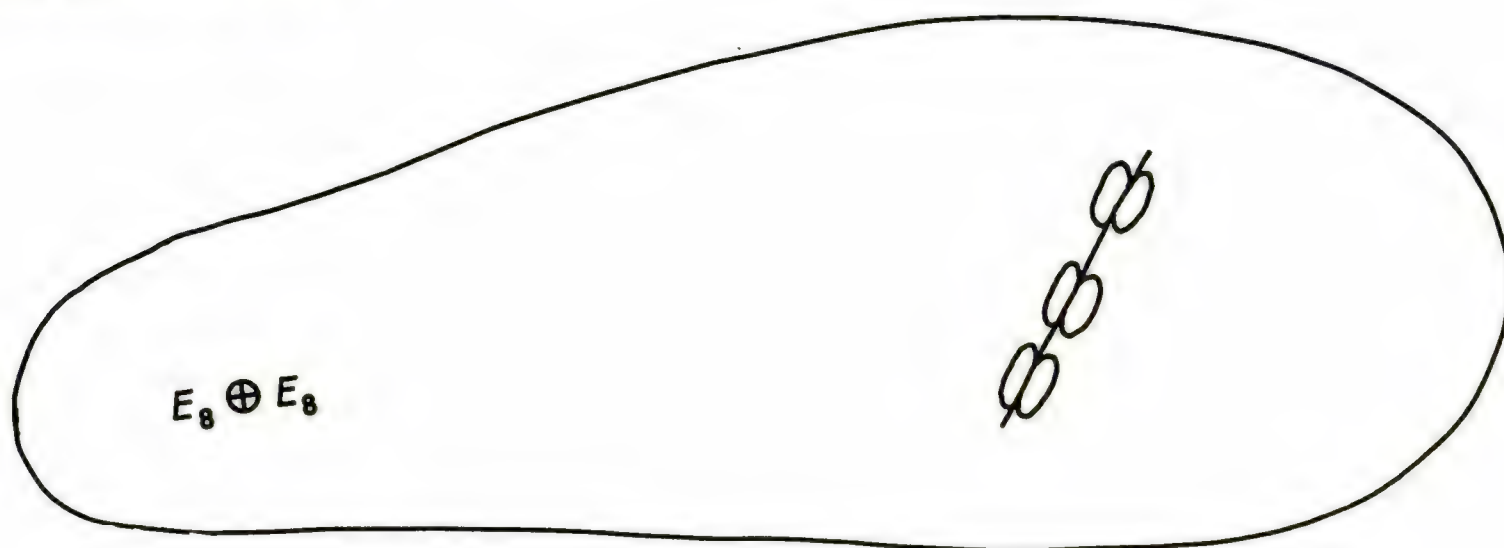
3. Вырезаем часть ручки:



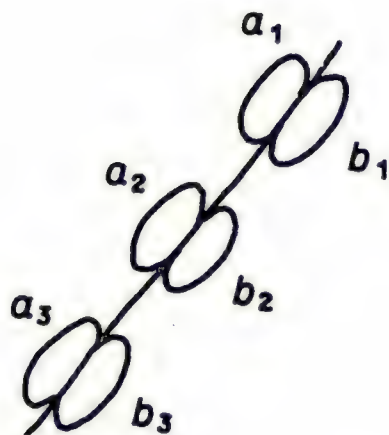
и заклеиваем оставшуюся часть двумя дисками, т.е. произведением $D^2 \times S^0$:



Займемся теперь поверхностью Куммера K . Представим ее следующей схемой:



где

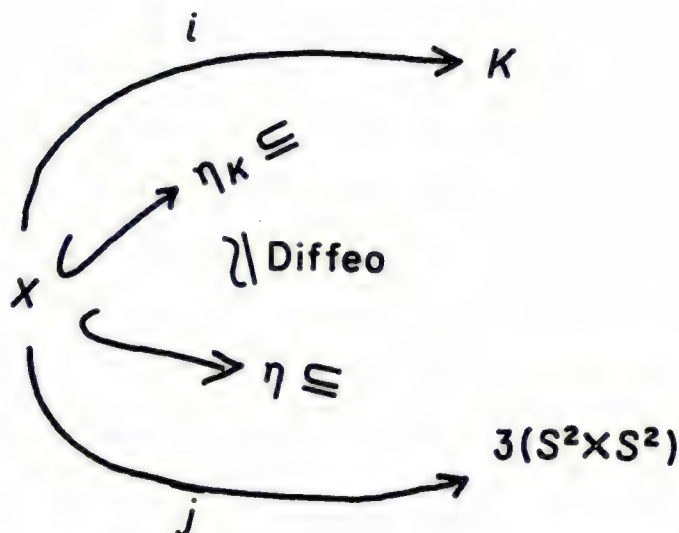


есть графическое изображение двумерных гомологий, образующими которых являются элементы $\alpha_i, \beta_i \in H_2(K; \mathbb{Z})$, $i = 1, 2, 3$. А теперь используем две топологические теоремы, которые можно рассматривать как следствия одного результата о ручках Кассона [Fr] (см. также работу Кассона [C]).

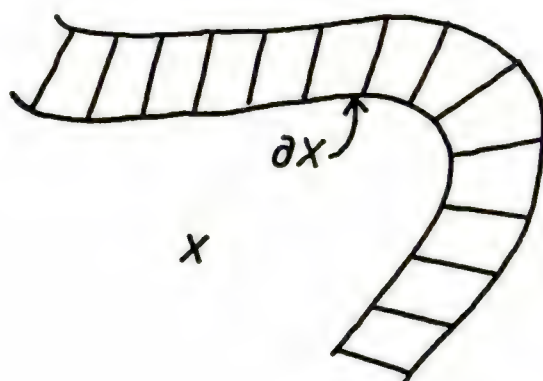
Т е о р е м а 1.5. Гомологии, порожденные элементами α_i, β_i , представляются окаймленным топологическим вложением многообразия $X = 3(S^2 \times S^2) - D^4$ в K . Более того, это вложение гладко эквивалентно вложению X в $3(S^2 \times S^2)$, представляющему гомологии многообразия $3(S^2 \times S^2)$.

Т е о р е м а 1.6. Пусть V — некомпактное односвязное четырехмерное многообразие без края, удовлетворяющее условию $H_2(V; \mathbb{Z}) = 0$ и имеющее единственный конец, гомеоморфный $S^3 \times [0, \infty)$. Тогда V гомеоморфно $\mathbb{R}^4$.

Теорема 1.5 утверждает, что имеет место коммутативная диаграмма

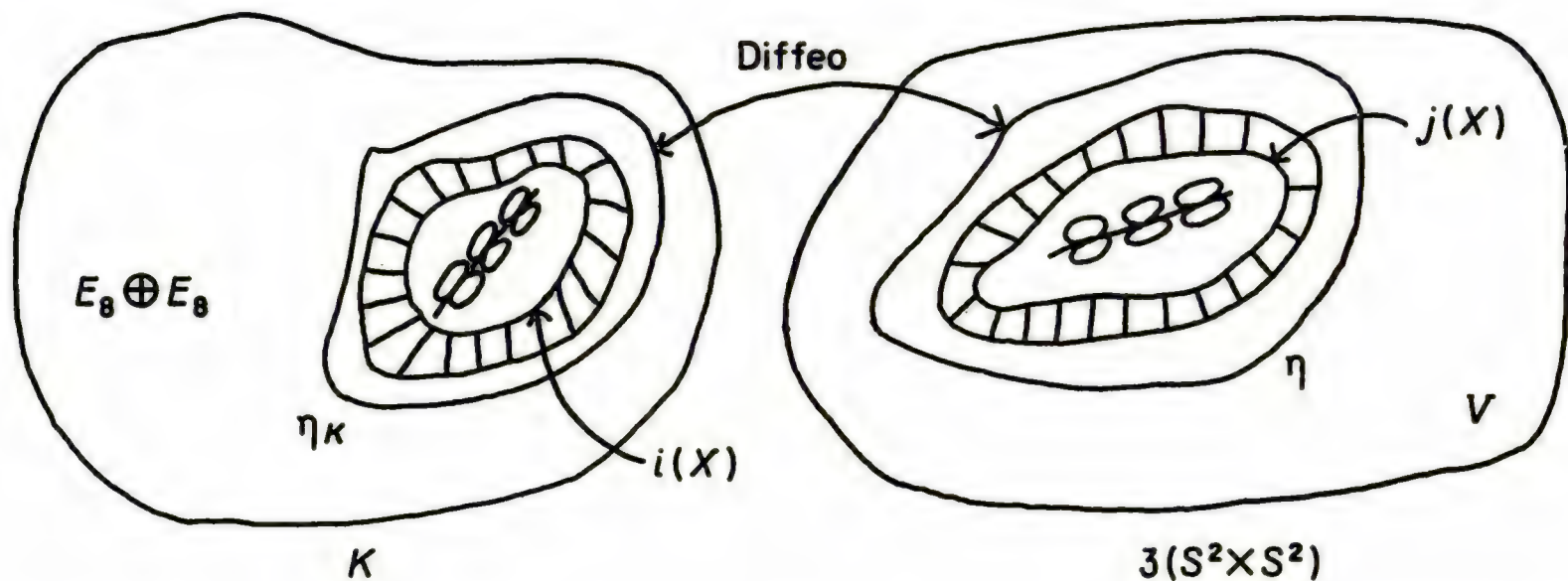


В этой диаграмме η_K и η — окрестности образа X в K и $3(S^2 \times S^2)$ соответственно. Напомним, что окаймленным вложением многообразия X называется вложение, при котором образ края ∂X имеет окрестность вида $\partial X \times [0, 1)$:



Из существования окаймления у $j(X) \subset 3(S^2 \times S^2)$ следует, что многообразие $V = 3(S^2 \times S^2) - j(X)$ имеет единственный конец, гомеоморфный $S^3 \times [0, \infty)$. Поэтому по теореме 1.6 многообразие V гомеоморфно $\mathbb{R}^4$.

Теперь мы воспользуемся теоремой Дональдсона и покажем, что гладкая структура, которую V наследует от $3(S^2 \times S^2)$, не является стандартной. Предположим, что существует гладко вложенная трехмерная сфера S^3 , окружающая многообразие $i(X)$ в его воротнике.



Тогда, применяя четырехмерный аналог описанной выше второй хирургической процедуры, мы можем построить гладкое многообразие $|E_8 \oplus E_8|$. Но теорема Дональдсона запрещает это. Значит, в воротнике $i(X)$ не существует гладко вложенной сферы S^3 . В силу диффеоморфизма $\eta_K \simeq \eta$ не существует гладко вложен-

ной сферы S^3 и в воротнике $j(X)$. Обозначая компактное множество $3(S^2 \times S^2) - (j(X) \cup \text{воротник})$ через C , мы видим, что в многообразии $V \stackrel{\text{top}}{\cong} \mathbb{R}^4$ не существует гладко вложенной сферы S^3 , окружающей C . Следовательно, V удовлетворяет условию (I.1), характеризующему фальшивое $\mathbb{R}^4$, и мы можем положить $\mathbb{R}_{\text{ф}}^4 = V$.

В заключение упомянем две открытые проблемы. Приведенные рассуждения доказывают существование на $\mathbb{R}^4$ новой гладкой структуры. Роберт Гомпф построил еще три различных фальшивых $\mathbb{R}^4$ [G]. Сколько всего имеется экзотических структур на $\mathbb{R}^4$? Наконец, существуют ли фальшивые четырехмерные сферы S^4 ? Гладкая четырехмерная гипотеза Пуанкаре утверждает, что фальшивых S^4 нет. Работа Фридмана показывает, что многообразие, гомотопически эквивалентное S^4 , гомеоморфно S^4 . Поэтому поставленный здесь вопрос можно переформулировать так: будет ли многообразие, гомеоморфное сфере S^4 , диффеоморфно ей.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ЯНГА – МИЛЛСА

Начиная с этого места, мы будем иметь дело с некоторым пространством орбит $\mathcal{M}$, называемым пространством модулей инстантов. Оно представляет собой множество решений автодуальных уравнений Янга – Миллса, профакторизованное по действию группы калибровочных преобразований. Автодуальные уравнения Янга – Миллса – это система дифференциальных уравнений в частных производных относительно связности в векторном расслоении над гладким четырехмерным многообразием, эллиптическая в направлениях, трансверсальных к орбитам группы калибровочных преобразований. Группа калибровочных преобразований – это просто группа послойных автоморфизмов векторного расслоения; она задает естественное отношение эквивалентности в рассматриваемой задаче и, следовательно, действует на пространстве решений автодуальных уравнений Янга – Миллса.

На интуитивном уровне наше пространство модулей можно рассматривать как аналог более привычного пространства модулей римановых поверхностей фиксированного рода. (В нашем случае род соответствует числу Чжэня векторного расслоения.) Напомним, что пространство модулей римановых поверхностей получается из бесконечномерного пространства всевозможных римановых поверхностей данного рода факторизацией по конформной эквивалентности. Это конечномерное клеточное пространство; чаще всего оно описывается как множество орбит действия на клетке (пространстве Тейхмюллера) некоторой дискретной группы (так называемой модулярной группы).

Наше пространство модулей устроено совершенно аналогично. Как уже указывалось, это пространство орбит решений автодуальных уравнений Янга – Миллса относительно действия группы калибровочных преобразований. Теорема Атьи – Зингера дает «аб-

страктную размерность» пространства $\mathcal{M}$ в виде индекса некоторого эллиптического комплекса. В нашем примере этот индекс равен пяти. При обращении в нуль групп нульмерных и двумерных когомологий указанного комплекса пространство модулей $\mathcal{M}$ наделяется структурой гладкого многообразия, а его «абстрактная размерность» становится настоящей размерностью. Особые точки на $\mathcal{M}$, порождаемые ненулевыми когомологиями, имеют два источника: одни происходят из неподвижных точек действия групп калибровочных преобразований, а другие обязаны своим появлением тому, что уравнения имеют решения не при любых правых частях. Оба эти случая подробнее рассматриваются в гл. 3 и 4. Особенности первого типа соответствуют приводимым связностям. Поэтому в настоящей главе мы изучаем связности в линейных $U(1)$ -расслоениях. После этого мы наконец получим возможность обрисовать доказательство теоремы Дональдсона. В последующих главах будут доказаны результаты о топологическом строении $\mathcal{M}$.

Уравнения Янга – Миллса были введены в пятидесятых годах физиками для описания сильных взаимодействий. Эта сторона дела хорошо изложена в ['] (см. также [May]). Хотя в физическом контексте уравнения Янга – Миллса представляют собой гиперболическую систему в пространстве Минковского, эллиптическая версия этих уравнений также имеет физическое содержание; такие уравнения появляются в квантовых теориях поля. В этой книге мы рассматриваем эллиптические уравнения Янга – Миллса на четырехмерных римановых многообразиях. Более подробные сведения и ссылки читатель найдет в обзорной статье Р. Стерна [Sn]. Рекомендуем также обратиться к работам [A2], [AB], [ANS], [B], [BL], [DV], [JT] и [Pa].

СВЯЗНОСТИ

Главное расслоение P над многообразием M со структурной группой G представляет собой скрученный вариант прямого произведения $M \times G$. (Для наших целей достаточно ограничиться группами $G = U(1) = S^1$ и $G = SU(2)$.) Хотя время от времени такое расслоение P и будет встречаться на страницах книги, оно не является существенной составной частью нашего изложения, и мы постараемся избежать его использования. Поэтому мы не останавливаемся на определении и элементарных

свойствах главных расслоений, отсылая читателя к стандартным руководствам (например, [KN1]). Вместо этого рассмотрим ассоциированное с P векторное расслоение η , гораздо лучше приспособленное к аналитической технике. Векторное расслоение η задается представлением $G \rightarrow \text{Aut}(V)$ как расслоенное произведение $\eta = P \times_G V$. В дальнейшем нам понадобится локальное описание η . А именно, пусть $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ — такое открытое покрытие M , что $\eta|_{\mathcal{O}_\alpha} \cong \mathcal{O}_\alpha \times V$. Тогда расслоение η определяется этим покрытием $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ и набором функций перехода

$$s_{\beta\alpha}: \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \rightarrow G \subseteq \text{Aut}(V),$$

удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$s_{\alpha\alpha} \equiv 1 \text{ в } \mathcal{O}_\alpha, \quad s_{\alpha\beta}^0 s_{\beta\alpha} \equiv 1 \text{ в } \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta,$$

$$s_{\alpha\gamma} \cdot s_{\gamma\beta} \cdot s_{\beta\alpha} \equiv 1 \text{ в } \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \cap \mathcal{O}_\gamma.$$

Расслоение η однозначно восстанавливается по своему локальному заданию $\{\mathcal{O}_\alpha, s_{\beta\alpha}\}$:

$$\eta = \bigsqcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha \times V / \sim,$$

где $\langle x, v \rangle \sim \langle y, w \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и $w = s_{\beta\alpha}(v)$, $x \in \mathcal{O}_\alpha$, $y \in \mathcal{O}_\beta$, $v, w \in V$. Подробное изложение этой локальной конструкции можно найти в книге Стинрода [Ste].

Хотя тривиализации $\eta|_{\mathcal{O}_\alpha} \cong \mathcal{O}_\alpha \times V$ и позволяют локально отождествлять слои расслоения, это отождествление не является каноническим. Для их канонического отождествления требуется задать связность, ковариантное дифференцирование или калибровочный потенциал (это равнозначные понятия). Ковариантное дифференцирование — это дифференциальный оператор первого порядка

$$D: C^\infty(\eta) \rightarrow C^\infty(\eta \otimes T^*M).$$

Здесь через $C^\infty(\eta)$ обозначено пространство C^∞ -сечений расслоения η . (В дальнейшем мы будем обозначать $C^\infty(\eta \otimes \wedge^i T^*M)$ через $\Omega^i(\eta)$.) Если расслоение η обладает метрикой, т.е. имеет структурную группу $U(n)$, потребуем дополнительно, чтобы выполнялось правило Лейбница

$$d(\sigma, \tau) = (D\sigma, \tau) + (\sigma, D\tau), \quad \sigma, \tau \in C^\infty(\eta).$$

В случае когда структурной группой η является группа $SU(n)$, потребуем, чтобы для ортонормированных локальных сечений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ выполнялось соотношение

$$D(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) = 0.$$

Вместо ковариантного дифференцирования D можно пользоваться эквивалентным понятием связности – она определяется в терминах главного расслоения P [КН1]. Мы же будем больше полагаться на локальное описание D . В окрестности $\mathcal{O}_\alpha$ ковариантное дифференцирование задается оператором $d + A_\alpha$, где

$$A_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow T^*(\mathcal{O}_\alpha) \otimes \mathfrak{g},$$

а $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G . (В случае $G = U(1)$ мы имеем $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$, а в случае $G = SU(2)$ алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ является алгебра косоэрмитовых матриц с нулевым следом, обозначаемая через $\mathfrak{su}(2)$.) К сожалению, при локальном описании получаются громоздкие обозначения, поскольку A снабжается тремя сортами индексов – матричными индексами, индексом, указывающим номер координатной карты, и индексом 1-формы. Так, например, $A_{\alpha,i}(x)$ – это матричнозначная функция на $\mathcal{O}_\alpha$. Различные локальные выражения для A связаны на пересечениях $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ формулами

$$(2.1) \quad A_\alpha = z_{\beta\alpha}^{-1} dz_{\beta\alpha} + z_{\beta\alpha}^{-1} A_\beta z_{\beta\alpha}.$$

Отметим, что форма A не имеет глобального описания на M . (В то же время связность отождествляется с элементом из $C^\infty(\mathfrak{g} \otimes T^*P)$.) В дальнейшем мы не будем делать различия

между связностями и ковариантными дифференцированиями и, допуская вольность речи, будем иногда называть операторы D связностями. Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство всех связностей в расслоении η . Из соотношений (2.1) вытекает, что разность двух связностей лежит в линейном пространстве $\Omega^1(\text{ad } \eta)$ и, следовательно, $\mathcal{A}$ — аффинное пространство. Здесь через $\text{ad } \eta$ обозначено расслоение $P \times_G \mathfrak{g}$, где G действует на $\mathfrak{g}$ с помощью присоединенного представления. Расслоение $\text{ad } \eta$ можно описать иначе, а именно как $\text{ad } \eta = \bigcup_{x \in M} (\text{ad } \eta_x)$, где $\text{ad } \eta_x \subset \text{End}(\eta_x)$ — алгебра Ли тех эндоморфизмов слоя η_x , которые лежат в $\mathfrak{g}$. Наше локальное описание отражает аффинную структуру, в которой связность представляется как некоторая фиксированная связность плюс произвольный элемент $A_\alpha \in \Omega^1(\text{ad } \eta|_{\mathcal{O}_\alpha})$.

Фиксируем на η некоторое ковариантное дифференцирование D . Тензорно умножая комплекс Де Рама

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n$$

на пространство $C^\infty(\eta)$, мы получаем последовательность векторных пространств и дифференциальных операторов

$$(2.2) \quad \Omega^0(\eta) \xrightarrow{D} \Omega^1(\eta) \xrightarrow{D} \Omega^2(\eta) \rightarrow \dots \xrightarrow{D} \Omega^n(\eta).$$

Первый оператор в этой последовательности — это в точности заданное ковариантное дифференцирование. Оно продолжается на $\Omega^i(\eta)$ по формуле

$$D(\zeta \otimes \theta) = D\zeta \wedge \theta + \zeta \otimes d\theta, \quad \zeta \in C^\infty(\eta), \quad \theta \in \Omega^i.$$

Кривизна (или калибровочное поле) связности задается оператором $D^2: \Omega^0(\eta) \rightarrow \Omega^2(\eta)$. Хорошо известно, что D^2 — оператор нулевого порядка, т.е. умножение на некоторый элемент $F \in \Omega^2(\text{ad } \eta)$. (Ниже мы получим этот элемент из наших локальных формул.) Кривизну F иногда записывают в виде

$$F = dA + A \wedge A,$$

где $A \wedge A$ определяется комбинацией внешнего и матричного умножений. Более подробно, если x^i – локальные координаты на M в окрестности O_α и $D_\alpha = d + A_\alpha$, то

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{\alpha,ij} dx^i \wedge dx^j,$$

где

$$(2.3) \quad F_{\alpha,ij} = \frac{\partial A_{\alpha,j}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{\alpha,i}}{\partial x^j} + [A_{\alpha,i}, A_{\alpha,j}].$$

(Заметим, что в этих формулах опущены матричные индексы; присутствуют лишь координатные индексы и индексы форм.) Из формул (2.3) вытекает, что

$$(2.4) \quad F_\alpha = \mathcal{S}_{\beta\alpha}^{-1} F_\beta \mathcal{S}_{\beta\alpha} = \text{ad}(\mathcal{S}_{\beta\alpha}^{-1}) F_\beta.$$

Следовательно, $F \in \Omega^2(\text{ad } \eta)$, как и утверждалось.

Предположим теперь, что M – четырехмерное ориентированное риманово многообразие. Тогда задан оператор $*$: $\Omega^2 \rightarrow \Omega^2$, определяемый послойно соотношением

$$\theta \wedge * \varphi = (\theta, \varphi) \text{vol}, \quad \theta, \varphi \in \Omega^2,$$

где $(,)$ – метрика на Ω^2 и vol – форма объема. Поскольку $*^2 = 1$, мы можем разложить Ω^2 в прямую сумму $\Omega^2 = \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2$, отвечающую собственным значениям ± 1 оператора $*$. Это соответствует разложению алгебры Ли $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. Элементы из Ω_+^2 называются авто-

дуальными, а элементы из Ω_-^2 – антиавтодуальными. Это разложение продолжается на пространство сечений $\Omega^2(\eta)$ для любого расслоения η . В частности, кривизна $F = F_+ + F_-$ разлагается на автодуальную и антиавтодуальную составляющие.

Наконец, введем группу послойных автоморфизмов главного расслоения P , которую будем называть в дальнейшем группой калибровочных преобразований. Предостережение: иногда ее называют калибровочной группой; обычно же этот термин сохраняется за группой G . Калибровочное преобразование – это послойное отображение $\mathcal{z}: P \rightarrow P$, удовлетворяющее условию $\mathcal{z}(p \cdot g) = \mathcal{z}(p) \cdot g$ для $p \in P$, $g \in G$. Эквивалентно, $\mathcal{z}$ является сечением

расслоения на группы $\text{Aut } \eta = P \times_G G$, где G действует на себе сопряжениями. Расслоение $\text{Aut } \eta$ можно также описать как $\bigcup_{x \in M} \text{Aut } \eta_x$, где $\text{Aut } \eta_x \subseteq GL(\eta_x)$ — группа Ли тех автоморфизмов слоя η_x , которые лежат в G . Обозначим группу калибровочных преобразований через $\mathfrak{G} = C^\infty(\text{Aut } \eta)$. Отметим, что, хотя $\text{Aut } \eta$ канонически определено как расслоение на группы, оно не является главным расслоением. Расслоение $\text{Aut } \eta$ имеет тривиальное подрасслоение $P \times_G Z$, где Z — центр группы G . В самом деле, $G = SU(2)$, $Z = \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 = C^\infty(P \times_G Z)$ является центром группы $\mathfrak{G}$. В общем случае расслоение $\text{Aut } \eta$ не тривиально, но оно тривиально, если G — абелева группа. Множество калибровочных преобразований $\mathfrak{G}$ является бесконечномерной группой Ли (групповая структура задается поточечным умножением сечений) с алгеброй Ли $C^\infty(\text{ad } \eta)$. Мы введем структуру группы Ли на $\mathfrak{G}$ в гл. 3.

Пусть $z \in \mathfrak{G}$. Тогда z действует на пространстве $\mathcal{A}$ ковариантных дифференцирований по формуле

$$(2.5) \quad z^*(D) = z^{-1} \circ D \circ z.$$

Таким образом, на сечениях $\phi \in C^\infty(\eta)$

$$z^*(D)\phi = z^{-1} D(z\phi).$$

В локальных терминах

$$(2.6) \quad z^*(A_\alpha) = z^{-1} dz + z^{-1} A_\alpha z,$$

где z теперь — это отображение $z: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow G$. Индуцированное действие на кривизну имеет вид

$$(2.7) \quad z^*(F) = z^{-1} F z.$$

Некоторые авторы определяют действие z на D правилом

$$z \cdot D = z \circ D \circ z^{-1}.$$

По сравнению с формулой (2.5) здесь поменялись ролями элементы z и z^{-1} , однако это не влияет на конечный результат.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА

Математики называют их классами Чжэня. Напомним, что если ξ – комплексное векторное расслоение со связностью и F – ее кривизна, то полный класс Чжэня $c(\xi)$ определяется формулой [KN2]

$$(2.8) \quad c(\xi) = \left[\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} F \right) \right] \in H^*(M; \mathbb{Z}).$$

(Скобки означают класс когомологий. В дальнейшем в этом разделе мы не будем различать дифференциальную форму и ее класс когомологий.) В случае комплексного линейного $U(1)$ -расслоения λ кривизна – это обычная числовая 2-форма f . Поэтому для таких расслоений

$$c(\lambda) = 1 + \frac{i}{2\pi} f;$$

эти расслоения топологически классифицируются своим первым классом Чжэня

$$c_1(\lambda) = \frac{i}{2\pi} f.$$

Более того, можно показать, что каждому элементу группы $H^2(M; \mathbb{Z})$ соответствует комплексное линейное расслоение. (Мы обсудим доказательство в приложении Е.) Если η – двумерное $SU(2)$ -расслоение, то

$$F = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Это означает, что $f_1^1 + f_2^2 = 0$. Из определения (2.8) вытекают следующие соотношения:

$$c_1(\eta) = 0,$$

$$c_2(\eta) = \frac{1}{4\pi^2} (f_2^1 \wedge f_1^2 - f_1^1 \wedge f_2^2) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F \wedge F).$$

Характеристический класс $c_2(\eta)$ классифицирует $SU(2)$ -расслоения над компактными четырехмерными многообразиями (доказательство этого факта приведено в приложении Е). Для классификации $SU(2)$ -расслоений над многообразиями более вы-

соких размерностей класса $c_2(\eta)$ уже недостаточно (см. $[DW]$, $[Pe]$). Вычисляя $c_2(\eta)$ на фундаментальном классе $[M]$ ориентированного четырехмерного многообразия, мы получаем топологический заряд

$$(2.9) \quad k = -c_2(\eta)[M] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F).$$

Знак минус в этом определении настолько прочно обосновался в литературе по уравнениям Янга – Миллса, что мы уже не в силах его изменить. Иногда вместо $c_2(\eta)$ используется первый класс Понтрягина $p_1(\eta)$, связанный с $c_2(\eta)$ соотношением $p_1(\eta) = -2c_2(\eta)$ (разумеется, в предположении, что структурная группа расслоения η есть $SU(2)$).

В каких случаях $SU(2)$ -расслоение η может быть представлено в виде прямой суммы линейных расслоений $\lambda_1 \oplus \lambda_2$? Если такое разложение существует, то по формуле Уитни для произведения получаем

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(\eta) = c_1(\lambda_1) + c_1(\lambda_2), \\ c_2(\eta) &= c_1(\lambda_1) \cup c_1(\lambda_2) = -c_1(\lambda_1) \cup c_1(\lambda_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(2.10) \quad k = \omega(\alpha, \alpha),$$

где $\alpha = \pm c_1(\lambda_1)$ и ω – форма пересечений. Тем самым доказана необходимость условия, приведенного в следующем предложении.

Предложение 2.11. Расслоение η над четырехмерным многообразием M со структурной группой $SU(2)$ и вторым числом Чжэня k топологически расщепляется тогда и только тогда, когда для некоторого класса двумерных когомологий α выполняется условие (2.10). Количество различных расщеплений при фиксированном k равно половине числа решений уравнения (2.10).

В частности, если ω – положительно определенная форма, то не расщепляется ни одно из расслоений η с отрицательным k .

Доказательство. Выше мы уже показали, что если расслоение η расщепляется, то для $\alpha = \pm c_1(\lambda_1)$ выполнено

условие $\omega(\alpha, \alpha) = k$. Предположим теперь, что некоторый элемент $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$ удовлетворяет условию $\omega(\alpha, \alpha) = k$. Тогда по теореме о классификации расслоений (Е.5) существует комплексное линейное расслоение λ с $c_1(\lambda) = \alpha$. Предыдущие вычисления показывают, что $-c_2(\lambda \oplus \lambda^{-1})[M] = k$, а тогда в силу теоремы Е.5 имеет место изоморфизм $SU(2)$ -расслоений $\eta \simeq \lambda \oplus \lambda^{-1}$.

В этих рассуждениях мы неявно предполагали, что группа $H^2(M; \mathbb{Z})$ не имеет кручения. В противном случае для того, чтобы определить форму пересечений ω , нужно профакторизовать $H^2(M; \mathbb{Z})$ по кручению. Заметим, что если $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$, то $\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$ (см. (Е.1)).

ФУНКЦИОНАЛ ЯНГА - МИЛЛСА

Пусть M — четырехмерное риманово многообразие и η — векторное расслоение над M . Ради удобства предположим, что структурной группой расслоения η является группа $SU(2)$. Скалярное произведение

$$(2.12) \quad (A, B) = -\text{tr}(AB), \quad A, B \in \mathfrak{su}(2),$$

вместе с римановой структурой на M превращает $\text{ad } \eta \otimes \Lambda^2 T^*M$ в риманово расслоение. Определим функционал Янга - Миллса $\mathcal{YM}(D)$, полагая

$$(2.13) \quad \mathcal{YM}(D) = \int_M |F_D|^2 * 1, \quad D \in \mathcal{A},$$

где $F = F_D$ — форма кривизны связности D и $*1$ — форма объема, ассоциированная с римановой метрикой. Функционал

$\mathcal{YM}(D)$ измеряет «напряженность» калибровочного поля F . Уравнениями Янга - Миллса называются уравнения Эйлера - Лагранжа для функционала $\mathcal{YM}(D)$. Поскольку

$$\begin{aligned} F_{D+tA} \sigma &= (D+tA)(D+tA) \sigma = \\ &= D^2 \sigma + t(D(A\sigma) + A \wedge D\sigma) + t^2(A \wedge A) \sigma = \\ &= [F + t(DA) + t^2(A \wedge A)] \sigma, \end{aligned}$$

мы имеем

$$(2.14) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{YM}(D+tA) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M |F+tDA+t^2 A \wedge A|^2 * 1 = \\ = 2 \int_M (DA, F) * 1 = 2 \int_M (A, D^* F) * 1.$$

Здесь $D^*: \Omega^2(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^4(\text{ad } \eta)$ — оператор, формально сопряженный к оператору $D: \Omega^4(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^2(\text{ad } \eta)$. В терминах оператора $*$

$$D^* = -*D*.$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа получаются приравниванием первой вариации (2.14) нулю для всех $A \in \mathcal{A}$. Таким образом,

$$(2.15) \quad D^* F_D = 0 = D * F_D.$$

Заметим, что уравнение

$$(2.16) \quad DF_D = 0$$

есть не что иное, как тождество Бьянки, и выполняется для любой связности D . Если форма F удовлетворяет уравнению (2.15), то F называется полем Янга — Миллса, а связность D — связностью Янга — Миллса. Уравнения (2.15) и (2.16) объясняют, почему теорию Янга — Миллса рассматривают как нелинейное обобщение теории Ходжа: заменяя D на d , а F_D на f , мы получим уравнения для гармонической 2-формы f . Нелинейность уравнений Янга — Миллса отражает некоммутативность группы G . Если $g_{ij} = \delta_{ij}$ — плоская метрика на базе, то в локальных координатах уравнения (2.15) приобретают вид

$$(D^* F)_i = \sum_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} + [A_i, F_{ij}] = 0.$$

Уравнения (2.15) не являются эллиптическими, главным образом из-за наличия большой группы симметрий. В самом деле, соотношение (2.7) и ad -инвариантность скалярного произведения (2.12) показывают, что функционал $\mathcal{YM}$, а, значит, и уравнения Эйлера — Лагранжа (2.15) инвариантны относительно калибровочных преобразований. Другими словами, $\mathcal{YM}$ является корректно определенным функционалом на факторпространстве $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Отметим, что для вычислений удобно выбрать какое-либо сечение $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$. Это можно сделать лишь локально $[s]$. Если

бы имелись глобальные сечения, то многие наши рассуждения можно было бы упростить. Однако ввиду топологических препятствий таких сечений не существует. Этот факт хорошо известен физикам под названием неоднозначности Грибова. Мы построим локальные сечения в гл. 3.

Разложим кривизну на автодуальную и антиавтодуальную компоненты:

$$F = F_+ + F_-.$$

Тогда, поскольку Ω_+^2 ортогонально Ω_-^2 , имеем

$$(2.17) \quad \mathcal{YM}(D) = \int_M |F_+|^2 + |F_-|^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{tr}(F \wedge F) &= \text{tr}(F_+ \wedge F_+) + \text{tr}(F_- \wedge F_-) = \\ &= \text{tr}(F_+ \wedge *F_+) - \text{tr}(F_- \wedge *F_-) = -|F_+|^2 + |F_-|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (2.9)

$$(2.18) \quad 8\pi^2 k = \int_M |F_+|^2 - |F_-|^2.$$

Таким образом, если $k > 0$, то

$$\mathcal{YM} \geq 8\pi^2 k,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $F_- = 0$, т.е. форма F автодуальна. Аналогично, если $k < 0$, то

$$\mathcal{YM} \geq -8\pi^2 k,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $F_+ = 0$, т.е. форма F антиавтодуальна. Более того, если F автодуальна или антиавтодуальна, то уравнение (2.15) следует из тождества Бьянки (2.16), так что F автоматически является решением уравнений Янга – Миллса. Таким образом, в случаях, когда нижняя грань является минимумом функционала, уравнения второго порядка (2.15) сводятся к автодуальным (антиавтодуальным) уравнениям Янга – Миллса первого порядка

$$(2.19) \quad F = \pm *F.$$

Однако в общем случае нет гарантии, что эта нижняя грань достигается. В некоторых ситуациях (например, для линейных расслоений над $S^2 \times S^2$) существуют минимумы, которые не являются ни автодуальными, ни антиавтодуальными.

В дальнейшем нас будет интересовать случай $k = 1$ и, следовательно, автодуальные поля Янга – Миллса, или инстантоны. Так как пространство инстантонов инвариантно относительно калибровочных преобразований, то, факторизуя по действию группы $\mathcal{G}$, мы получаем пространство модулей инстантонов

$$\mathcal{M} = \{D \in \mathcal{A} : F_D = *F_D\} / \mathcal{G}.$$

Пространство $\mathcal{M}$ и будет главным объектом нашего изучения.

ЛИНЕЙНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Хорошо известно, что в случае, когда $G = U(1)$, а M – многообразие Лоренца, уравнения (2.15) и (2.16) превращаются в уравнения Максвелла [MTW]. Мы же изучаем положительно определенные метрики, а, значит, эллиптическую версию этих уравнений. В самом деле, поскольку группа $U(1)$ абелева, для любого линейного $U(1)$ -расслоения λ расслоение $\text{ad } \lambda$ тривиально: $\text{ad } \lambda \simeq M \times i\mathbb{R}$. Следовательно, кривизна f связности d' есть обычная числовая 2-форма. Уравнения (2.15) и (2.16) в этом случае сводятся к уравнениям

$$df = 0,$$

$$d^*f = 0,$$

показывающим, что эллиптическая версия уравнений Максвелла есть не что иное, как уравнения Ходжа – Де Рама для гармонических 2-форм. Из теоремы Ходжа вытекает

Т е о р е м а 2.20. Пусть λ – некоторое линейное расслоение. Тогда кривизна любой связности Янга – Миллса d' является однозначно определенной гармонической 2-формой представляющей класс $c_1(\lambda)$.

Разумеется, связность Янга – Миллса d' в теореме 2.20 не единственна: достаточно вспомнить о калибровочных преобразованиях! Предположим, что многообразие M односвязно, и потому каждое калибровочное преобразование на λ может быть записано в виде $s = e^{iu}$ для некоторой функции u . Пусть d_0 – фиксированная связность Янга – Миллса на λ . Тогда любая другая связность Янга – Миллса имеет вид

$$d' = d_0 + i\alpha, \quad \alpha \in \Omega^1,$$

где $d\alpha = 0$. Согласно формуле (2.6), калибровочное преобразование s переводит d' в $d_0 + idu$. Но по предположению $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$; следовательно, можно выбрать функцию u так, чтобы выполнялось соотношение $du = \alpha$. Значит, калибровочные преобразования транзитивно действуют на пространстве связностей Янга – Миллса. Другими словами, пространство модулей для уравнений Янга – Миллса (2.15) – (2.16) на расслоении λ состоит из единственной точки. Заметим, что если $\pi_1(M) \neq 0$, то пространством модулей служит тор $H^1(M; \mathbb{R})/H^1(M; \mathbb{Z})$.

Для того чтобы применить полученные результаты к $SU(2)$ -расслоениям, нам понадобится следующая важная

Л е м м а 2.21. Форма пересечений ω многообразия M положительно определена тогда и только тогда, когда на M не существует антиавтодуальных гармонических 2-форм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f = f_+ + f_-$ – разложение гармонической 2-формы на автодуальную и антиавтодуальную части. Требуемое утверждение без труда получается из формулы

$$\|f\|^2 = \omega(f_+, f_+) - \omega(f_-, f_-),$$

которая показывает, что

$$\|f_-\|^2 = -\omega(f_-, f_-).$$

Сказанного достаточно, чтобы полностью описать – при прежних топологических предположениях – расщепляющиеся инстантоны для расщепляющихся расслоений (см. предложение 2.11).

Предложение 2.22. Предположим, что многообразие M имеет положительно определенную форму пересечений. Тогда для любого расщепляющегося $SU(2)$ -расслоения $\eta = \lambda \oplus \lambda^{-1}$ существует единственное автодуальное поле Янга – Миллса

$$F = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -f \end{pmatrix},$$

согласованное с расщеплением.

Доказательство. Легко видеть, что связности Янга – Миллса на расслоениях λ и λ^{-1} индуцируют связность Янга – Миллса на $\lambda \oplus \lambda^{-1}$; по лемме 2.21 кривизна этой связности автодуальна. Обратно, расщепляющаяся автодуальная связность на $\lambda \oplus \lambda^{-1}$ остается автодуальной при ограничении на каждое линейное расслоение. Эти связности калибровочно эквивалентны (см. рассуждения, следующие за теоремой 2.20).

ТЕОРЕМА ДОНАЛЬДСОНА

Наметим в общих чертах основные идеи, содержащиеся в работе Дональдсона. Для этого рассмотрим $SU(2)$ -расслоение η с топологическим зарядом $k = 1$ над компактным односвязным ориентированным гладким четырехмерным многообразием M с положительно определенной формой пересечений ω . Нас интересует топологическая структура пространства модулей инстантов $\mathcal{M}$ на η . Главные результаты, касающиеся топологии $\mathcal{M}$, можно сформулировать в виде пяти утверждений, доказательствам которых будут посвящены последующие главы.

I. Пусть m – половина числа решений уравнения $\omega(\alpha, \alpha) = 1$. Тогда для почти всех метрик на M существуют такие точки $p_1, \dots, p_m \in M$, что $\mathcal{M} - \{p_1, \dots, p_m\}$ является гладким пятимерным многообразием. Точки p_i находятся во взаимно однозначном соответствии с топологическими расщеплениями $\eta = \lambda \oplus \lambda^{-1}$.

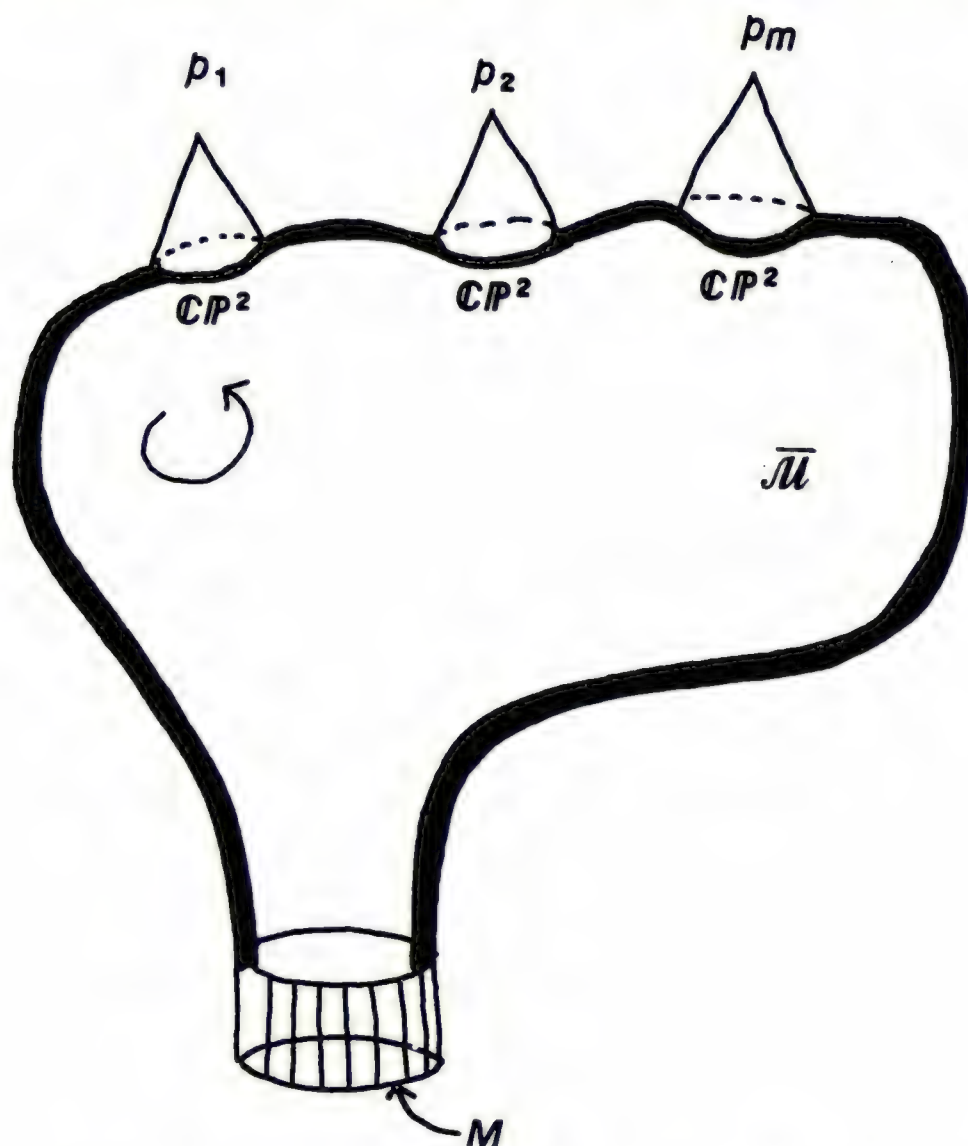
II. Точки p_i обладают в $\mathcal{M}$ окрестностями $\mathcal{O}_{p_i}$, гомеоморфными конусам над $\mathbb{CP}^2$.

III. Пространство $\mathcal{M}$ ориентируемо.

IV. Многообразие $\mathcal{M} - \{p_1, \dots, p_m\}$ не пусто. Более того, существует окаймленное вложение $(0, \lambda_0] \times M \subset \mathcal{M}$ и $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup M \supset [0, \lambda_0] \times M$ является гладким многообразием с краем.

V. Многообразие $\bar{\mathcal{M}}$ компактно.

Топологию пространства модулей можно представить такой картинкой:



Жирная линия символизирует компактность ($\bar{\mathcal{Y}}$), а стрелка означает ориентируемость (III). Отметим, что пока неизвестно, связно или нет многообразие $\bar{\mathcal{M}}$ ¹⁾.

В качестве непосредственного следствия утверждений $\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{Y}}$ получается

¹⁾ В настоящее время известно, что пространство модулей инстантонов связно. См. Taubes C.H. Path connected Yang - Mills moduli spaces. - J. Diff. Geom., 1984, v. 19, № 3, pp. 337-392. - Прим. перев.

Л е м м а 2.23. Многообразие M ориентированно-кобордантно несвязному объединению $\underbrace{\pm \mathbb{C}P^2 \sqcup \dots \sqcup \pm \mathbb{C}P^2}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемый ориентированный кобордизм имеет вид $\bar{M} - \bigcup_i \mathbb{C}P^2_{p_i}$. (Краткое обсуждение кобордизмов читатель найдет в приложении В.)

Пока мы не делаем никаких утверждений об ориентациях $\mathbb{C}P^2$, фигурирующих в лемме 2.23. Например, если бы оказалось, что некоторые особые точки находятся в различных связных компонентах многообразия $\bar{M}$, то заведомо не все $\mathbb{C}P^2$ были бы положительно ориентированы. Однако из доказательства теоремы 2.25 будет ясно, что все эти $\mathbb{C}P^2$ лежат в связной компоненте воротника и потому положительно ориентированы.

Л е м м а 2.24. Пусть ω — положительно определенная симметрическая унимодулярная форма ранга $n = n(\omega)$ и m — половина числа решений α уравнения $\omega(\alpha, \alpha) = 1$. Тогда $m \leq n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда форма ω диагонализуема над целыми числами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение α задает расщепление $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \cdot \alpha \oplus \alpha^\perp$, где $\alpha^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathbb{Z}^n$ к $\mathbb{Z} \cdot \alpha$ относительно формы ω . Если $\beta \neq \pm \alpha$ — еще одно решение, то $\beta \in \alpha^\perp$. Лемма получается теперь индукцией по рангу n .

Т е о р е м а 2.25 (Дональдсон [D]). Пусть M — компактное односвязное ориентированное гладкое четырехмерное многообразие с положительно определенной формой пересечений ω . Тогда над целыми числами

$$\omega \simeq \underbrace{(1) \oplus \dots \oplus (1)}_m.$$

Из линейной алгебры известно, что любая симметрическая форма диагонализуема над полем $\mathbb{R}$. Теорема Дональдсона утверждает, что положительно определенная форма ω гладкого четырехмерного многообразия диагонализуема также и над кольцом $\mathbb{Z}$.

Требование односвязности в теореме 2.25 можно заменить более слабым условием: фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не имеет нетривиальных гомоморфизмов в $SU(2)$. Из последнего условия вытекает, что каждое плоское $SU(2)$ -расслоение над M тривиально [KN1], а это все, что нам нужно. Отметим, что это условие влечет обращение в нуль группы $H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)] = \pi_1^{\text{аб}}(M)$ (абелизации группы $\pi_1(M)$), поскольку любая абелева группа имеет нетривиальное представление в $S^1 \subset SU(2)$. Перечисленные условия на топологию M можно изобразить в виде последовательности импликаций

$$\{\pi_1(M) = 0\} \Rightarrow \{\pi_1(M) \rightarrow SU(2) \text{ тривиален}\} \Rightarrow \{H_1(M) = 0\}.$$

Так как никакая конечная простая неабелева группа не имеет нетривиальных представлений в $SU(2)$ [Do, § 26], то наше доказательство теоремы Дональдсона проходит для всех таких фундаментальных групп. В то же время многие важные группы (скажем, $\mathbb{Z}_2$) исключаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.25. Так как сигнатура формы пересечений является инвариантом ориентированного кобордизма [Sto, с. 219], то из леммы 2.23 и положительной определенности ω следует, что

$$\chi(\omega) = b(\omega) \leq m \cdot b(\mathbb{CP}^2) = m.$$

(Строгое неравенство могло бы появиться, если бы некоторое $\mathbb{CP}^2$ было приклеено «задом наперед».) Но $m \leq \chi(\omega)$ в силу леммы 2.24. Поэтому $m = \chi(\omega)$, т.е. форма ω диагонализуема.

С л е д с т в и е 2.26. Если $\omega \neq \emptyset$ и $\omega(\alpha, \alpha) \neq 1$ при любых $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$, то многообразие M не сглаживаемо. В частности, это имеет место для четных форм ω .

Отметим, что имеется много нечетных положительно определенных унимодулярных форм, не принимающих значения 1 [CS].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия вытекает, что $m = 0$, поэтому многообразие M кобордантно нулю. Следовательно,

$b(\omega) = 0$, а так как форма ω положительно определена, то $\omega = \emptyset$. Это противоречие показывает, что многообразие M не может быть наделено гладкой структурой.

Следствие 2.26 представляет собой вариант теоремы Дональдсона, сформулированной в гл. 1. В частности, оно показывает, что $|E_8 \oplus E_8|$ — несглаживаемое многообразие.

Комбинируя теорему Дональдсона с классификационной теоремой Фридмана, нетрудно получить

С л е д с т в и е 2.27. Пусть M — гладкое односвязное четырехмерное многообразие. Если форма $\omega(M)$ четна и положительно определена, то M гомеоморфно четырехмерной сфере S^4 . Если форма $\omega(M)$ нечетна и положительно определена, то M гомеоморфно связной сумме некоторого числа экземпляров положительно ориентированной комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

Любая нечетная неопределенная форма диагоналізуема над целыми числами $[\mathbb{N}]$, поэтому по теореме Фридмана гладкое многообразие M с нечетной неопределенной формой пересечений $\omega(M)$ гомеоморфно связной сумме $\sqcup \pm \mathbb{C}P^2$. Четная неопределенная форма эквивалентна над $\mathbb{Z}$ форме вида

$$\alpha E_8 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

Напомним, что по теореме Рохлина многообразие $|\alpha E_8 \oplus b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|$ несглаживаемо для нечетных α . До сих пор неизвестен ответ на самый животрепещущий вопрос четырехмерной теории сглаживания: существуют ли гладкие многообразия $|2E_8 \oplus b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|$, где $b = 1$ или 2 . (Поверхность Куммера реализует форму, в которой $b = 3$; для $b > 3$ нужно взять связную сумму поверхности Куммера с $b - 3$ экземплярами $S^2 \times S^2$.)

Читатель, возможно, захочет узнать, какие трудности возникают при изменении различных предположений, фигурирующих в теореме Дональдсона. Ранее мы отмечали, что требование односвязности многообразия M можно ослабить, предположив, что фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не имеет нетривиальных представлений в

$SU(2)$. Это условие возникает из-за того, что гомоморфизмы $\pi_1(M) \rightarrow SU(2)$ классифицируют геометрически плоские расслоения, т.е. топологически тривиальные $SU(2)$ -расслоения с, возможно, нетривиальными плоскими связностями. Край компактифицированного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}$, совпадающий в нашем случае с многообразием M , получается склеиванием стандартных инстантов (над S^4) на таких плоских расслоениях. Если на многообразии существуют нетривиальные плоские расслоения, можно ожидать появления более сложного края, подобного тому, который описан Таубсом [Т2] для случая неопределенной формы пересечений.

Многие факторы влияют на размерность пространства модулей, которая для главного расслоения P с компактной структурной группой G над компактным четырехмерным многообразием M задается явной формулой [АHS]

$$(2.28) \quad \dim \mathcal{M}_P = p_1((\text{ad } P)_{\mathbb{C}})[M] - (\dim G)(1 - b_1 + b_2^-).$$

Здесь $(\text{ad } P)_{\mathbb{C}}$ - комплексифицированное присоединенное расслоение алгебр Ли, p_1 - первый класс Понтрягина, b_1 - первое число Бетти многообразия M и b_2^- - размерность максимального подпространства в $H^2(M; \mathbb{R})$, на котором форма пересечений отрицательно определена. В случае $\dim G > 3$ трудности описания структуры пространства модулей в окрестностях приводимых связностей столь велики, что приходится ограничиться группами $G = SU(2)$ или $SO(3)$. Для $SU(2)$ -расслоений формула (2.28) принимает вид

$$\dim \mathcal{M}_{SU(2)} = 8k - 3(1 - b_1 + b_2^-),$$

где, как всегда, k означает взятое с минусом второе число Чжэня ассоциированного двумерного комплексного расслоения. Напомним, что при $k \geq 0$ пространство $\mathcal{M}_{SU(2)}$ непусто, а если $k = 0$, то все автодуальные связности являются плоскими. Случай $k = 1$, $b_1 = b_2^- = 0$ приводит к пятимерному пространству модулей, которое используется при доказательстве теоремы Дональдсона. Любая модификация чисел k и b_1 увеличила бы размерность пространства $\mathcal{M}_{SU(2)}$, а тем самым помешала бы воспользоваться кобордантностью. Поэтому, чтобы компенсировать вклад k и b_1 , требуется брать подходящее ненулевое

число b_2^- . А это, в силу упомянутой выше конструкции Таубса [Т2], указывает на необозримо сложный край компактифицированного пространства модулей.

Для $SO(3)$ -расслоений

$$(2.29) \quad \dim \mathcal{M}_{SO(3)} = 2\ell - 3(1 - b_1 + b_2^-),$$

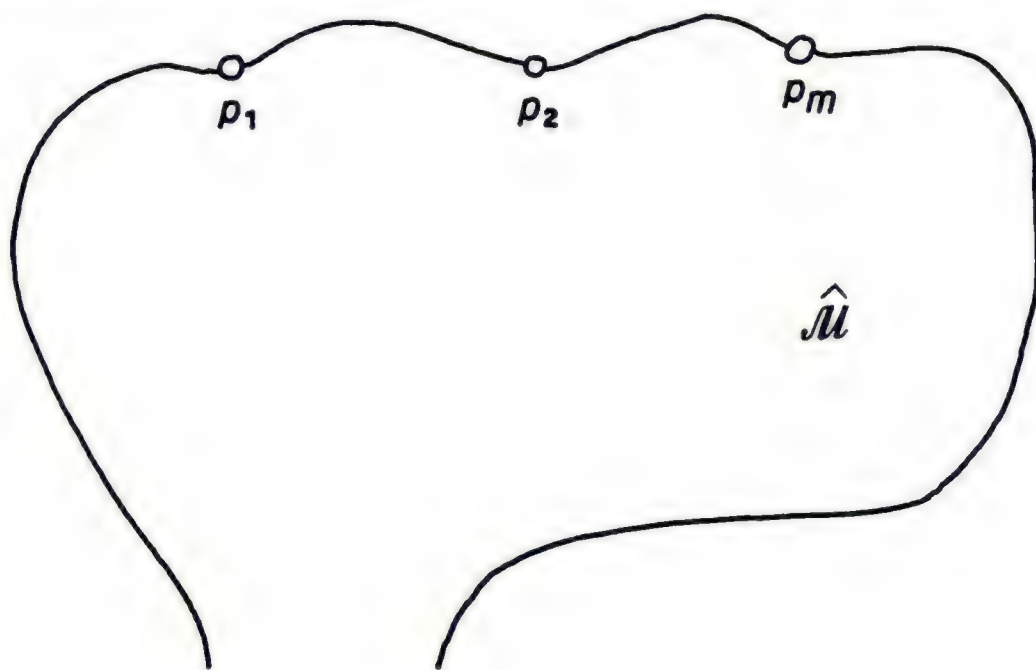
где ℓ — число Понтрягина ассоциированного трехмерного вещественного расслоения. Отметим, что в случае, когда $b_1 = b_2^- = 0$ и $\ell = 2$, пространство модулей одномерно. Финтушел и Стерн [FS] построили $SO(3)$ -расслоение ξ с $\ell = 2$ и $w_2(\xi) \neq 0$ исходя прямо из формы пересечений ω . Для этого требуется, чтобы уравнение $\omega(\alpha, \alpha) = 2$ имело решения $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$. (Таких решений не существует для многих положительно определенных форм ω , например для 24-мерной решетки Лича.) Предположим вдобавок, что α не является ортогональной прямой суммой двух векторов единичной длины. В этой ситуации Финтушел и Стерн доказали, что $\mathcal{M}_\xi$ является компактным одномерным многообразием, край которого состоит ровно из одной точки. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемое многообразие M несглаживаемо, и дает тем самым новое доказательство теоремы Дональдсона для широкого класса форм пересечений (включая форму $E_8 \oplus E_8$). В доказательстве Финтушела и Стерна не используются ориентируемость, теорема Таубса и теорема о воротнике, хотя по-прежнему применяется трудная аналитическая техника, опирающаяся на соображения компактности. Более того, эта ограниченная форма теоремы Дональдсона справедлива для почти всех конечных фундаментальных групп. Развитый Финтушелем и Стерном подход позволил получить также новый инвариант для трехмерных гомологических сфер. Мы изложим некоторые их результаты в гл. 10.

Наиболее перспективным направлением будущих исследований является изучение четырехмерных многообразий с краем или с точечными особенностями (которые можно конформно отправить в бесконечность, как в гл. 7). Однако индексные вычисления здесь далеко не просты [APS], и в настоящий момент именно это сдерживает развитие данного направления.

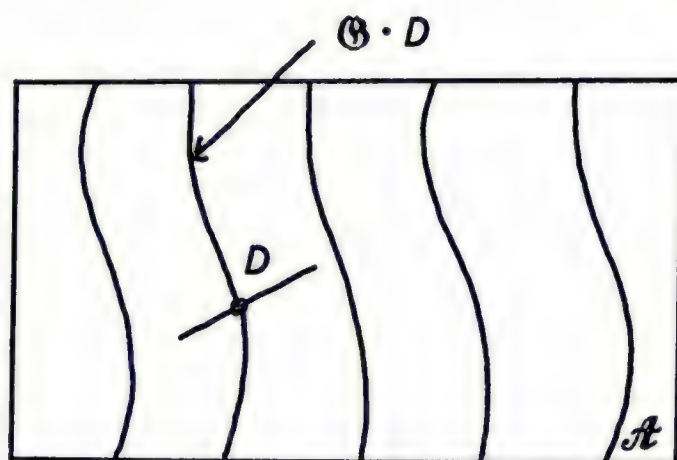
Глава 3

МНОГООБРАЗИЯ СВЯЗНОСТЕЙ

В этой главе мы покажем, что пространство модулей $\hat{\mathcal{M}}$, т.е. множество классов калибровочно эквивалентных неприводимых автодуальных связностей, является гладким многообразием.



(На протяжении всей книги символом « $\wedge$ » над пространством связностей обозначается подпространство неприводимых связностей.) Доказательство этого факта занимает довольно много места, поэтому сначала мы приведем краткое неформальное описание его основных идей. Обозначим через $\mathcal{X} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ множество орбит простран-



ства связностей $\mathcal{A}$ относительно действия группы калибровочных преобразований. Первый шаг заключается в построении среза этого действия вне приводимых связностей, т.е. в доказательстве того, что $\hat{\mathcal{X}}$ — многообразие.

В настоящее время неизвестно, для каждой ли метрики g на нашем исходном многообразии M пространство модулей $\hat{\mathcal{M}}_g \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ является многообразием. Однако мы показываем, что $\hat{\mathcal{M}}_g$ — многообразие для почти всех метрик g . Таким образом, мы выбираем в качестве пространства параметров пространство метрик $\mathcal{C}$ и рассматриваем множество

$$\hat{\mathcal{SD}} \subseteq \hat{\mathcal{A}} \times \mathcal{C},$$

где

$$\hat{\mathcal{SD}} = \{ \langle D, g \rangle : F_D \text{ автодуальна в метрике } g \}.$$

Далее мы показываем, что $\hat{\mathcal{SD}}$ является многообразием. Рассмотрим пространство орбит $\hat{\mathcal{SD}}/\mathcal{G}$ действия группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}$ на $\hat{\mathcal{SD}}$. Для него по-прежнему существует срез действия, поэтому $\hat{\mathcal{SD}}/\mathcal{G}$ — также многообразие. Представим это параметризованное пространство модулей в виде

$$\hat{\mathcal{SD}}/\mathcal{G} \simeq \bigcup_{g \in \mathcal{C}} \hat{\mathcal{M}}_g,$$

где $\hat{\mathcal{M}}_g$ — пространство модулей для метрики g . Наконец, применяя к проекции

$$\hat{\mathcal{SD}}/\mathcal{G} \simeq \bigcup_{g \in \mathcal{C}} \hat{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathcal{C}$$

теорему Сарда — Смейла (т.е. бесконечномерный аналог теоремы Сарда), мы показываем, что $\hat{\mathcal{M}}_g$ является гладким многообразием для почти всех g .

Пространства с C^∞ -топологией малопригодны для большинства наших доказательств: такие пространства не являются банаховыми и на них необратимы эллиптические операторы. Поэтому мы заменяем их соболевскими пространствами или пространствами с C^k -топологией. Необходимые факты о соболевских пространствах собраны в первом разделе. Затем даются критерии для нахождения приводимых связностей. После этих приготовлений мы приступаем к доказательству основной теоремы.

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Мы ограничимся здесь лишь самыми основными фактами; более подробное изложение можно найти в работах [Ан], [Р], [Ма, гл. 3], а также в гл. 6. Пусть $\pi: \xi \rightarrow M$ — риманово (или эрмитово) векторное расслоение со связностью D над компактным n -мерным римановым многообразием. Для каждого неотрицательного целого числа ℓ обозначим через $H_\ell(\xi)$ пространство тех сечений расслоения ξ , все-производные которых порядков $\leq \ell$ квадратично интегрируемы. Таким образом, $H_\ell(\xi)$ — это гильбертово пространство, являющееся пополнением $C^\infty(\xi)$ относительно скалярного произведения

$$(\sigma, \tau)_\ell = \int_M \sum_{i \leq \ell} (D^i \sigma, D^i \tau) * 1,$$

где $(D^i \sigma, D^i \tau)$ вычисляется с помощью скалярного произведения на $\xi \otimes \text{Sym}^i(T^*M)$. Напомним, что $H_\ell(\xi) \subset C^k(\xi)$ для $\ell - n/2 > k$ (Соболев) и вложение $H_\ell(\xi) \subset H_k(\xi)$ является компактным оператором для $\ell > k$ (Реллих). В нелинейных задачах мы будем иметь дело с нелинейными расслоениями $\pi: E \rightarrow M$, т.е. расслоениями, слои которых не являются векторными пространствами. Например, пространство $\text{Map}(M, N)$ отображений многообразия M в многообразие N есть не что иное, как пространство сечений тривиального расслоения $\pi: M \times N \rightarrow M$. Очевидно, что такие нелинейные расслоения естественно возникают в теории Янга — Миллса: калибровочные преобразования представляют собой сечения расслоения, слои которого — группы. В этих случаях при $\ell > n/2$ пространство $H_\ell(E)$ будет гильбертовым многообразием (для $n = 4$ нужно потребовать, следовательно, чтобы $\ell > 2$). Структура гильбертова многообразия на $H_\ell(E)$ описывается довольно сложно. В то же время описание касательного пространства к сечению $z \in H_\ell(E)$ не представляет особого труда. В самом деле, пусть $\gamma: (-1, 1) \rightarrow H_\ell(E)$ — кривая, у которой $\gamma(0) = z$. Тогда для каждого $x \in M$ кривая $\gamma_x(t) = \gamma(t)(x)$ лежит в $E_x = \pi^{-1}(x)$. Следовательно, $\gamma'_x(0) \in T_{\gamma_x(0)}(\pi^{-1}(x))$ и $\gamma'(0)$ является сечением расслоения $z^*(VTE)$, где VTE — вертикальное касательное расслоение многообразия E . Таким образом, $T_z(H_\ell(E)) = H_\ell(z^*(VTE))$.

Применим теперь эти общие наблюдения к нашей ситуации. Пусть η — векторное $SU(2)$ -расслоение с числом Понтрягина $k=1$ над компактным четырехмерным римановым многообразием M , $\mathfrak{G}$ — группа калибровочных преобразований, $\mathcal{A}$ — пространство связностей на η , $\text{Aut } \eta$ и $\text{ad } \eta$ — расслоения, определенные в гл. 2. Фиксируем некоторое число $\ell > 2$. Тогда имеют место следующие утверждения (доказательства см. в приложении А).

1. Используя отождествление $\mathfrak{G} = C^\infty(\text{Aut } \eta)$, определим гильбертово многообразие $\mathfrak{G}_\ell = H_\ell(\text{Aut } \eta)$. Можно показать, что $\mathfrak{G}_\ell$ является гильбертовой группой Ли, т.е. бесконечномерной группой Ли, смоделированной на гильбертовом пространстве (см. А.2). Так как алгеброй Ли группы $\text{Aut } \eta_x$ является $\text{ad } \eta_x = T_{\text{id}}(\text{Aut } \eta_x) = VT_{\langle x, \text{id} \rangle}(\text{Aut } \eta)$, то алгеброй Ли группы $\mathfrak{G}_\ell$ служит $T_{\text{id}}(\mathfrak{G}_\ell) = H_\ell(\text{id}^*(VT(\text{Aut } \eta))) = H_\ell(\text{ad } \eta)$.

2. Выберем некоторую связность $D_0 \in \mathcal{A}$ и определим аффинное пространство

$$\mathcal{A}_{\ell-1} = D_0 + H_{\ell-1}(\text{ad } \eta \otimes T^*M)$$

(в силу сделанных ранее соглашений обозначим $H_{\ell-1}(\text{ad } \eta \otimes T^*M)$ через $\Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$). Индекс $\ell-1$ появляется из-за дифференцирования в формуле (2.1). Из этой формулы следует, что группа $\mathfrak{G}_\ell$ гладко действует на $\mathcal{A}_{\ell-1}$ (см. А.3).

3. Оператор кривизны

$$F: \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow \Omega^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2}$$

является гладким отображением (см. А.4). Дифференциал F , обозначаемый через δF , в точке $D \in \mathcal{A}_{\ell-1}$ представляет собой линейное отображение.

$$D: \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \rightarrow \Omega^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2}.$$

4. Если форма F_D автодуальна, то из соображений эллиптической регулярности (о которых будет сказано в гл. 8) следует, что существует элемент $z \in \mathfrak{G}_\ell$, для которого $z^*(D)$ — гладкая связность (см. [Ра, § 5]). Это свойство гарантирует,

что топология пространства $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} / \mathfrak{G}_\ell$ не зависит от $\ell > 2$.

ПРИВОДИМЫЕ СВЯЗНОСТИ

Связность $D \in \mathcal{A}_{\ell-1}$ называется приводимой (или расщепляющейся), если расслоение η и связность D разлагаются в прямые суммы $\eta = \lambda_1 \oplus \lambda_2$, $D = d_1 \oplus d_2$. Такие расщепления отвечают особенностям в пространстве модулей, поэтому важно знать, в каких случаях связность D приводима.

Т е о р е м а 3.1. Предположим, что связность D не плоская ($F_D \neq 0$). Тогда эквивалентны следующие условия:

- (а) $\mathfrak{G}_{\ell,D} / \mathbb{Z}_2 \simeq U(1)$, где $\mathfrak{G}_{\ell,D} \subset \mathfrak{G}_\ell$ — стационарная подгруппа точки $D \in \mathcal{A}_{\ell-1}$;
- (б) оператор $D: \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$ имеет ненулевое ядро;
- (с) связность D приводима;
- (д) $\mathfrak{G}_{\ell,D} / \mathbb{Z}_2 \neq 1$.

Здесь группа $\mathbb{Z}_2$ — это центр $\mathfrak{G}_\ell$ (см. гл. 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Rightarrow$ (б). Выберем ненулевой элемент $u \in \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell$ так, чтобы он лежал в алгебре Ли группы $\mathfrak{G}_{\ell,D}$. Дифференцируя тривиальное действие калибровочных преобразований из $\mathfrak{G}_{\ell,D}$ на D , получаем, что $u \circ D = D \circ u$, или $Du = 0$.

(б) $\Rightarrow$ (с). Фиксируем элемент $u \in \text{Ker } D$. Так как поточно элемент u является косоэрмитовой матрицей с нулевым следом, то его собственные значения суть $\pm i\lambda$. В открытом множестве, где $\lambda > 0$, выберем гладко изменяющийся собственный вектор e , удовлетворяющий условиям $ue = i\lambda e$ и $(e, e) = 1$. Дифференцируя эти равенства, мы получим

$$uDe = i(d\lambda)e + i\lambda De,$$

$$\text{Re}(De, e) = 0.$$

Скалярно умножим первое из этих равенств на e и затем выделим мнимую часть. В итоге получим

$$d\lambda = \operatorname{Im}(uDe, e) = -\operatorname{Im}(De, ue) = \lambda \operatorname{Re}(De, e) = 0.$$

Отсюда следует, что собственное значение λ постоянно и вектор e глобально определен. Это задает расщепление $\eta = \lambda_1 \oplus \lambda_2$. Кроме того, написанные выше уравнения показывают, что $De = 0$; таким образом, $D = d_1 \oplus d_2$ является приводимой связностью.

(с) $\Rightarrow$ (d). В группе $\mathfrak{G}_{\ell, D}$ содержится окружность $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Более подробно, главное $SU(2)$ -расслоение P ,

ассоциированное с η , редуцируется к $U(1)$ -расслоению Q . Поскольку группа $U(1)$ абелева, присоединенное расслоение $Q \times_{U(1)} U(1)$ тривиально, имеет тривиальную связность (индуцированную связностью на Q) и вложено в расслоение $P \times_{SU(2)} SU(2)$. Окружность постоянных сечений расслоения $Q \times_{U(1)} U(1)$ содержится в $\mathfrak{G}_{\ell, D}$.

(d) $\Rightarrow$ (а). Пусть z — сечение расслоения $P \times_{SU(2)} SU(2)$, удовлетворяющее условию $Dz = 0$, т.е. $z \in \mathfrak{G}_{\ell, D}$. Если $z \neq \pm id$, то, как и выше, z имеет неравные постоянные собственные значения; эти собственные значения определяют расщепление $\eta = \lambda_1 \oplus \lambda_2$. Нетрудно показать, что элемент z лежит на окружности из $\mathfrak{G}_{\ell, D}$. Если факторгруппа $\mathfrak{G}_{\ell, D}/\mathbb{Z}_2$ больше, чем $U(1)$, то группа гомотопии связности D , являющаяся централизатором стационарной подгруппы $\mathfrak{G}_{\ell, D}$, меньше, чем $U(1)$, и, следовательно, дискретна. Но тогда $F_D \equiv 0$, что противоречит нашему предположению.

В качестве следствия мы получаем, что группа $\mathfrak{G}_{\ell}/\mathbb{Z}_2$ свободно действует на пространстве неприводимых связностей $\hat{\mathcal{A}}$. Кроме того, если связность D приводима, то $\operatorname{Ker} D$ одномерно. В последующих рассуждениях мы будем постоянно пользоваться характеристикой приводимых связностей, задаваемой свойством (b).

ТЕОРЕМА О СРЕЗЕ

Начнем с напоминания основных фактов о действиях групп [v, § 2.9]. Пусть группа G действует на многообразии M . Обозначим через $\Gamma = \{ \langle x, g \circ x \rangle : x \in M, g \in G \} \subseteq M \times M$

график этого действия, а через M/G — пространство орбит в фактортопологии. Назовем срезом действия группы G в точке $x \in M$ такое открытое подмногообразие N , содержащее x , что

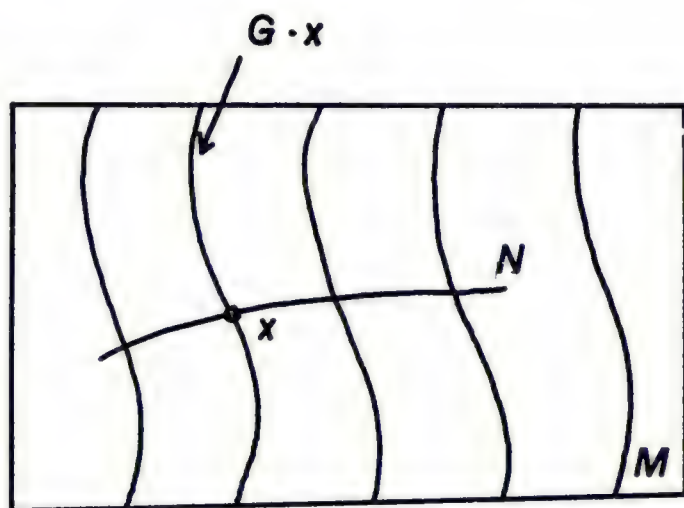
$$(a) \quad T_y M = T_y(G \cdot y) \oplus T_y N \text{ для всех } y \in N,$$

(b) ограничение проекции $M \rightarrow M/G$ на N является взаимно однозначным отображением.

Имеют место следующие утверждения.

(i) Пространство M/G хаусдорфово тогда и только тогда, когда график Γ замкнут.

(ii) Если группа G свободно действует на M и для каждой точки $x \in M$ можно найти срез этого действия, то пространство орбит M/G является многообразием (хаусдорфовым многообразием, когда выполнено условие (i)).



Рассмотрим теперь пространство орбит $\hat{\mathcal{X}}_{\ell-1}$ действия группы $\mathfrak{G}_\ell$ калибровочных преобразований на неприводимых связностях $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$. Мы можем благополучно заменить группу $\mathfrak{G}_\ell$ на $\tilde{\mathfrak{G}}_\ell = \mathfrak{G}_\ell / \mathbb{Z}_2$, так как $\tilde{\mathfrak{G}}_\ell$ свободно действует на $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$. Чтобы объяснить нашу конструкцию, временно опустим соболевские индексы. Фиксируем связность $D \in \hat{\mathcal{A}}$. Поскольку пространство $\hat{\mathcal{A}}$ наделено скалярным произведением, разумно попытаться построить срез как ортогональное дополнение к касательному пространству для орбиты $\mathfrak{G} \cdot D$. Считая D базисной точкой, можно представить любую связность в виде $D + A$, где $A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)$. Достаточно рассмотреть алгебру Ли $\Omega^0(\text{ad } \eta)$ группы $\tilde{\mathfrak{G}}$. Элемент $u \in \Omega^0(\text{ad } \eta)$ действует по формуле $D \mapsto Du$. Поэтому мы ищем множество связностей A , удовлетворяющих условию

$$(A, Du) = 0,$$

или

$$(D^*A, u) = 0,$$

для всех u . Следовательно, множество

$$\mathcal{X}_D = \{A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} : D^*A = 0\},$$

которое естественно отождествить с касательным пространством к $\hat{\mathcal{X}}$ в точке D , и есть наш искомый срез (перенесенный в начало координат).

Т е о р е м а 3.2. В каждой точке $D \in \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ пространство $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ локально диффеоморфно $\text{Ker}(D^*) \times \tilde{\mathcal{G}}_\ell$. Другими словами, существуют такая окрестность $\mathcal{O}_D$ точки D в $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ и такое отображение $z: \mathcal{O}_D \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_\ell$, что $z(D')^*D' \in D + \mathcal{X}_D$ для любого $D' \in \mathcal{O}_D$. Кроме того,

$$\Phi_D: D' \mapsto \langle z(D')^*D' - D, z(D') \rangle$$

диффеоморфно отображает $\mathcal{O}_D$ на окрестность точки $\langle 0, \text{id} \rangle$ в $\mathcal{X}_D \times \tilde{\mathcal{G}}_\ell$. Наконец, отображение Φ_D эквивариантно относительно действия группы $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ на $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$ и окрестность $\mathcal{O}_D$ может быть выбрана $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ -инвариантной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и раньше, запишем D' в виде $D' = D + A$ и будем строить z как решение уравнения

$$L_D(A, z) = D^*(z^{-1}Dz + z^{-1}Az) = 0.$$

Дифференциал отображения L_D в точке $\langle 0, \text{id} \rangle$ задается правилом

$$\delta L_D: \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \oplus \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

$$\delta A \oplus \delta z \mapsto D^*(D(\delta z) + \delta A).$$

Частный дифференциал $\delta_2 L_D = D^*D$ во втором слагаемом является самосопряженным эллиптическим оператором. Поскольку связность D неприводима, из результатов предыдущего параграфа вытекает, что оператор D^*D не имеет ядра и, значит, обратим. Из теоремы о неявной функции в гильбертовом пространстве мы получаем окрестность $\mathcal{O}_D$ и отображение z . Обратное к отображению Φ_D задается формулой

$$\langle A', s \rangle \mapsto sA's^{-1} - (Ds)s^{-1}.$$

Эквивариантность следует из уравнения

$$L_D(t^*A, t^{-1}s) = L_D(A, s), \quad t \in \mathfrak{G}.$$

С л е д с т в и е . Если $\ell > 2$, то $\hat{\mathcal{X}}_{\ell-1}$ является хаусдорфовым многообразием.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Мы должны показать, что $\hat{\mathcal{X}}_{\ell-1}$ — хаусдорфово пространство и что ограничение проекции $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}/\mathfrak{G}_\ell$ на окрестность начала координат в $D + \mathcal{X}_D$ взаимно однозначно. Начнем с доказательства хаусдорфовости. Для этого достаточно показать, что график

$$\Gamma = \{ \langle D, s^*(D) \rangle : D \in \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}, s \in \mathfrak{G}_\ell \} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}$$

замкнут. Предположим, что последовательность $\{ \langle D + A_n, s_n^*(D + A_n) \rangle \} \subseteq \Gamma$ сходится. Тогда

$$s_n^*(D + A_n) = D + s_n^{-1}(Ds_n) + s_n^{-1}A_ns_n = D + A'_n,$$

так что $A'_n \rightarrow A'$ для некоторого $A' \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$. Отсюда и из того факта, что $A_n \rightarrow A$ для некоторого $A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$, вытекает, что обе последовательности $\{A_n\}$ и $\{A'_n\}$ ограничены в $\Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$. Заметим теперь, что включение $\text{Aut } \eta \subseteq \text{End } \eta$ (т.е. $SU(2) \subseteq \mathfrak{gl}(2; E)$) определяет вложение $\mathfrak{G}_\ell \hookrightarrow H_\ell(\text{End } \eta)$. Кроме того, $\text{ad } \eta \hookrightarrow \text{End } \eta$ и скалярное произведение

$$(X, Y) = \text{tr}(XY^*)$$

на $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$ является продолжением скалярного произведения (2.12). Поэтому вложение $\mathfrak{G}_\ell \hookrightarrow H_\ell(\text{End } \eta)$ представляет собой изометрию. Рассмотрим s_n, A_n, A'_n как сечения расслоения $\text{End } \eta$. Следовательно, мы можем оценить величину s_n соболевскими нормами. Из равенства

$$(3.3) \quad \perp s_n = s_n A'_n - A_n s_n$$

и того факта, что элементы s_n унитарны, вытекает ограничен-

ность последовательности $\|Dz_n\|_0$. Отсюда, многократно применяя равенство (3.3) («бутстрап»), находим, что $\|Dz_n\|_1, \|Dz_n\|_2, \dots, \|Dz_n\|_{\ell-1}$ также ограничены. (Здесь $\|\cdot\|_k$ означает норму в соболевском пространстве $H_k(\text{End } \eta \otimes T^*M)$.) Детали доказательства можно найти в предложении А.5 приложения А. Итак, последовательность $\{z_n\}$ ограничена в $H_\ell(\text{End } \eta)$, поэтому по теореме Реллиха существует подпоследовательность, которую мы по-прежнему будем обозначать через $\{z_n\}$, сходящаяся в $H_{\ell-1}(\text{End } \eta \otimes T^*M)$. Равенство (3.3) показывает теперь, что последовательность $\{Dz_n\}$ сходится в $H_{\ell-1}(\text{End } \eta)$; значит, $\{z_n\}$ сходится к элементу $z \in H_\ell(\text{End } \eta)$. Так как группа $\mathfrak{G}_\ell$ замкнута в $H_\ell(\text{End } \eta)$, то $z \in \mathfrak{G}_\ell$. По непрерывности, $z^*(D+A) = D+A'$, и тем самым график Γ замкнут.

Покажем теперь, что если элементы $A, A' \in \mathcal{X}_D$ удовлетворяют неравенствам $\|A\|_{\ell-1} < \varepsilon$, $\|A'\|_{\ell-1} < \varepsilon$ для достаточно малого положительного ε и если $D + A' = z^*(D+A)$ для некоторого $z \in \mathfrak{G}_\ell$, то норма $\|z \pm 1\|_\ell$ настолько мала (при определенном выборе знака), что $\langle A, z \rangle \in \mathcal{O}_D$. Тогда из теоремы будет следовать, что $A = A'$, а значит, шар радиуса ε в $D + \mathcal{X}_D$ вкладывается в факторпространство (т.е. является координатной картой на $\hat{\mathcal{A}}_{\ell-1}/\tilde{\mathfrak{G}}_\ell$). Прежде всего разложим элемент z из $H_\ell(\text{End } \eta)$ в сумму двух компонент:

$$z = z_0 + c,$$

где $c \in \text{Ker } D$ и $z_0 \in (\text{Ker } D)^\perp$. Заметим, что c является постоянным диагональным отображением и что z_0 и c в общем случае не лежат в $\mathfrak{G}_\ell \subset H_\ell(\text{End } \eta)$. Оценивая z_0 при помощи бутстрапа, как в предыдущих рассуждениях (см. А.5), получим, что $\|z_0\|_\ell < K\varepsilon$ для некоторого K , зависящего от D и ℓ . Так как $|z| = 1$ (элемент z унитарен) и норма $|z_0|$ достаточно мала, то $|c| \approx 1$. Заменяем c на $c/|c| = \pm 1$ и соответствующим образом модифицируем z_0 . Тогда предыдущее неравенство остается верным, если заменить K на $2K$. Это дает требуемое неравенство $\|z \pm 1\|_\ell < 2K\varepsilon$.

ПАРАМЕТРИЗОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ

Конечную цель настоящей главы составляет доказательство того, что пространство модулей является многообразием. Как уже упоминалось, пока не известно, верно ли это утверждение для любой метрики, поэтому в процессе доказательства нам придется рассматривать возмущения метрики. Прямое применение соображений трансверсальности не проходит для калибровочных преобразований, поэтому наше доказательство будет основываться на теореме об эквивариантной трансверсальности. Рассмотрим объединение пространств модулей по всем метрикам. Если в качестве пространства параметров взять пространство метрик, мы столкнемся с серьезными техническими трудностями, поскольку будет потерян контроль над автодуальностью. Вместо этого мы возьмем в качестве пространства параметров множество $\mathcal{C} = C^k(GL(TM))$ всех автоморфизмов класса C^k касательного расслоения. Разумеется, это в точности калибровочная группа для расслоения реперов. Мы используем класс гладкости C^k , потому что тогда $\mathcal{C}$ является банаховым многообразием. (Если бы мы взяли класс C^∞ , то получили бы всего лишь многообразие Фреше.) Множество $\mathcal{C}$ действует на пространстве всех ковариантных тензоров валентности 2 (т.е. на сечениях расслоения $T^*M \otimes T^*M$) взятием прообраза. Поэтому если g — наша основная метрика на M , $\varphi \in \mathcal{C}$, то φ^*g будет новой метрикой, причем каждая метрика может быть реализована таким способом. Если потребовать, чтобы преобразование φ было симметрическим, то такая реализация единственна. Это следует из представления множества скалярных произведений на $\mathbb{R}^n$ в виде однородного пространства $GL(n)/O(n)$. Разумеется, поскольку мы рассматриваем произвольные преобразования φ , каждая метрика будет появляться много раз. Однако это не повлияет на наше доказательство.

Пусть

$$P_-: \Omega^2 \rightarrow \Omega_-^2, \quad \theta \mapsto \frac{1}{2}(\theta - *\theta)$$

есть проекция на антиавтодуальные 2-формы относительно метрики g ; тогда оператор $\varphi^*P_-(\varphi^{-1})^*$ будет проекцией на антиавтодуальные 2-формы относительно метрики φ^*g . Фиксируем $k \gg l$ и определим отображение

$$\mathcal{P}: \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} \rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

полагая

$$\langle D, \varphi \rangle \mapsto P_-((\varphi^{-1})^* F_D).$$

Тогда $\mathcal{P}\langle D, \varphi \rangle = 0$ в том и только том случае, когда форма F_D автодуальна относительно $\varphi^* \varphi$ ($\mathcal{C}$ было выбрано в качестве пространства параметров именно для того, чтобы автодуальные формы можно было находить с помощью отображения в фиксированное пространство).

Т е о р е м а 3.4. Отображение $\mathcal{P}$ является гладким и имеет нуль своим регулярным значением.

Другими словами, утверждается, что в случае, когда $\mathcal{P}\langle D, \varphi \rangle = 0$, дифференциал $\delta \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle} \mathcal{P}^{-1}(0)$ является эпиморфизмом. Из теоремы следует, что пространство $\hat{\mathcal{S}}\mathcal{D}_{\ell-1}$ представляет собой гладкое многообразие. Конечно, $\hat{\mathcal{S}}\mathcal{D}_{\ell-1}$ — это еще не наше параметризованное пространство модулей; его нужно профакторизовать по группе калибровочных преобразований.

В качестве первого шага, ведущего к доказательству теоремы 3.4, мы исследуем влияние на автодуальные и антиавтодуальные 2-формы бесконечно малых вариаций репера. Пусть V — четырехмерное ориентированное евклидово векторное пространство, мыслимое нами как касательное пространство к многообразию M в некоторой точке. Фиксируем для V^* ориентированный ортонормированный базис $\{e^k\}$. Пусть β^{ij} — ортогональная проекция элемента $e^i \wedge e^j$ на пространство автодуальных форм $\Lambda_+^2 V^*$, т.е. $\beta^{ij} = P_+(e^i \wedge e^j)$, и аналогично пусть α^{ij} — ортогональная проекция элемента $e^i \wedge e^j$ на пространство антиавтодуальных форм $\Lambda_-^2 V^*$, т.е. $\alpha^{ij} = P_-(e^i \wedge e^j)$. Тогда базисом $\Lambda_+^2 V^*$ служит $\{\beta^{12}, \beta^{13}, \beta^{14}\} = \{\beta^{34}, \beta^{42}, \beta^{23}\}$, а базисом $\Lambda_-^2 V^*$ является $\{\alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{14}\} = \{\alpha^{43}, \alpha^{24}, \alpha^{32}\}$. Как показывает следующее несложное утверждение, можно так повернуть систему координат, что произвольная (анти)автодуальная форма станет базисным элементом.

Л е м м а 3.5. Пусть $\theta_{\pm} \in \Lambda_{\pm}^2 V^*$. Тогда существует такой ортонормированный базис $\{e^k\}$ пространства V^* , что

$$\theta_{\pm} = \frac{|\theta_{\pm}|}{2} (e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Нам достаточно показать, что орбиты действия группы $SO(4)$ на $\Lambda_{\pm}^2 V^*$ являются сферами. Это вытекает из теории групп, поскольку для стандартного разложения группы $Spin(4) = Spin(3) \times Spin(3)$, отвечающего разложению алгебры Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, пространства $\Lambda_{\pm}^2 V^*$ являются пространствами присоединенных представлений множителей $Spin(3)$, т.е. стандартных представлений $SO(3)$. Более прямое доказательство можно получить, произвольно фиксируя форму e^1 и выполняя в явном виде поворот координат к требуемой форме.

Бесконечно малые изменения метрики порождаются симметрическими преобразованиями репера, т.е. такими преобразованиями из $gl(V)$, которые симметричны относительно фиксированной метрики на V . Очевидно, что кососимметрические матрицы являются бесконечно малыми вращениями и не оказывают влияния на метрику. Симметрические преобразования порождаются преобразованиями

$$\begin{aligned} \tau_i^i &= e_i \otimes e^i, \\ \tau_j^i &= e_i \otimes e^j + e_j \otimes e^i, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

которые действуют на $\Lambda^2 V^*$ по формулам:

$$\begin{aligned} (\tau_i^i)^*(e^i \wedge e^j) &= e^i \wedge e^j, \\ (\tau_i^i)^*(e^j \wedge e^k) &= 0, \\ (\tau_k^i)^*(e^k \wedge e^j) &= e^i \wedge e^j, \\ (\tau_k^i)^*(e^i \wedge e^k) &= 0, \\ (\tau_k^i)^*(e^l \wedge e^j) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь индексы i, j, k, l всюду принимают неравные значения. Из этих формул следует, что

$$\begin{aligned} (\tau_i^i)^* \sigma^{ij} &= \sigma^{ij} + \alpha^{ij}, \\ (\tau_k^i)^* \sigma^{ij} &= \alpha^{kj}, \quad i \neq j \neq k; \end{aligned} \tag{3.6}$$

соотношения для антиавтодуальных связностей получаются обращением ориентации. Это действие тождественно продолжается на $\Lambda_{\pm}^2 V^* \otimes W$ для любого векторного пространства W ; в нашем контексте W — это слой присоединенного расслоения. В следующей лемме предполагается, что W снабжено скалярным произведением.

Л е м м а 3.7. Предположим, что формы $F \in \Lambda_+^2 V^* \otimes W$ и $\Phi \in \Lambda_-^2 V^* \otimes W$ удовлетворяют условию $(\eta^* F, \Phi) = 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{gl}(V)$. Тогда форма $(F, \Phi)_W \in \Lambda_+^2 V^* \otimes \Lambda_-^2 V^*$ равна нулю.

Эта лемма проще читается в координатах. Пусть $F = \sum_{i=2}^4 \sigma^{1i} \otimes F_i$ и $\Phi = \sum_{j=2}^4 \alpha^{1j} \otimes \Phi_j$; тогда мы утверждаем, что $(F_i, \Phi_j) = 0$ для всех i, j . Имеется еще одна интерпретация леммы: если рассматривать F и Φ как элементы пространств $\text{Hom}(\Lambda_+^2 V, W)$ и $\text{Hom}(\Lambda_-^2 V, W)$ соответственно, то утверждается, что образы $\text{Im}(F)$ и $\text{Im}(\Phi)$ ортогональны.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для $\eta = \eta_3^1 + \eta_4^2$ имеем

$$\begin{aligned} (\eta_3^1 + \eta_4^2)^* \sigma^{12} &= 2\alpha^{14}, \\ (\eta_3^1 + \eta_4^2)^* \sigma^{13} &= 0, \\ (\eta_3^1 + \eta_4^2)^* \sigma^{14} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом,

$$(3.9) \quad 0 = ((\eta_3^1 + \eta_4^2)^* F, \Phi) = 2(F_2, \Phi_4).$$

Из соображений симметрии $(F_2, \Phi_3) = 0$. Теперь возьмем $\eta = \eta_1^1 + \eta_2^2 - \eta_3^3 - \eta_4^4$. Получим

$$\begin{aligned} (\eta_1^1 + \eta_2^2 - \eta_3^3 - \eta_4^4)^* \sigma^{12} &= 2\alpha^{12}, \\ (\eta_1^1 + \eta_2^2 - \eta_3^3 - \eta_4^4)^* \sigma^{13} &= 0, \\ (\eta_1^1 + \eta_2^2 - \eta_3^3 - \eta_4^4)^* \sigma^{14} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Следовательно,

$$(3.11) \quad 0 = ((\gamma_1^1 + \gamma_2^2 - \gamma_3^3 - \gamma_4^4)^* F, \Phi) = 2(F_2, \Phi_2).$$

Собирая вместе (3.9) и (3.11), находим, что $(F_2, \Phi_j) = 0$ для всех j ; по симметрии все (F_i, Φ_j) обращаются в нуль.

Следующая наша лемма касается одного элементарного свойства алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

Л е м м а 3.12. Пусть векторы $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ не равны нулю. Если $(X, Y) = 0$, то $[X, Y] \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ базис

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $X = X^i \epsilon_i$ и $Y = Y^i \epsilon_i$ — разложения векторов X и Y по этому базису. Тогда $(X, Y) = -\text{tr}(XY) = 2X \cdot Y$ и $[X, Y] = 2X \times Y$, где « $\cdot$ » обозначает стандартное скалярное произведение, а « $\times$ » — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Если одновременно $X \cdot Y = 0$ и $X \times Y = 0$, то $X = 0$ или $Y = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.4. Отображение $\mathcal{P}$ квадратично по D и φ , откуда легко следует, что оно является гладким. Обозначим через $\mathfrak{c} = C^k(\text{End}(TM))$ алгебру Ли группы $\mathcal{G}$. Разложим дифференциал $\delta \mathcal{P}$ отображения $\mathcal{P}$ на два слагаемых, соответствующих расслоениям над пространством связностей и над пространством реперов:

$$\begin{array}{ccc} \delta \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}: & T_D(\mathcal{A}_{\ell-1}) \oplus T_\varphi(\mathcal{G}) & \longrightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \delta_1 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle} \oplus \delta_2 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}: & \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} & \longrightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \end{array}$$

Тогда

$$\delta_1 \mathcal{P} = \delta_1 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}: \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

$$A \mapsto P_-((\varphi^{-1})^* DA)$$

и

$$\delta_2 \mathcal{P} = \delta_2 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}: \mathfrak{c} \rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

$$\mathfrak{r} \mapsto P_-((\varphi^{-1})^*(\mathfrak{r}^* F_D))$$

являются частными дифференциалами отображения $\mathcal{P}$. (Заметим, что $(\varphi^{-1})^*$ — это действие группы Ли, а $\mathfrak{r}^*$ — действие алгебры Ли.)

Предположим, что $\mathcal{P}\langle D, \varphi \rangle = 0$. Мы хотим показать, что дифференциал $\delta \mathcal{P}$ является эпиморфизмом, или, что эквивалентно, $\text{Coker}(\delta \mathcal{P}) = 0$. Мы отождествляем $\text{Coker}(\delta \mathcal{P})$ с подпространством пространства $\Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{2-\ell}$, L^2 -двойственным к $\Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2}$. Так как оператор $\delta_1 \mathcal{P}$ входит в эллиптический комплекс

$$0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \xrightarrow{\delta_1 \mathcal{P}} \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \rightarrow 0,$$

то он сюръективно эллиптивен (т.е. символ $\delta_1 \mathcal{P}$ является эпиморфизмом). Поэтому подпространство $\text{Im}(\delta_1 \mathcal{P})$ замкнуто и имеет конечную коразмерность. (Метрики, для которых $\delta_1 \mathcal{P}$ является эпиморфизмом, в точности совпадают с теми, для которых $\hat{\mathcal{M}}$ — многообразие.) Тогда $\text{Im}(\delta \mathcal{P}) \supseteq \text{Im}(\delta_1 \mathcal{P})$ — также замкнутое подпространство конечной коразмерности. Кроме того, $\text{Coker}(\delta \mathcal{P}) \subseteq \text{Coker}(\delta_1 \mathcal{P})$ состоит из функций, содержащихся в $\Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2}$, а не из распределений, содержащихся в $\Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{2-\ell}$. Это следует из регулярности для переопределенной эллиптической системы $(\delta_1 \mathcal{P})^* \Phi = 0$ (коэффициенты которой имеют класс гладкости C^k).

Предположим, что $\Phi \in \text{Coker}(\delta \mathcal{P})$. Мы хотим показать, что $\Phi = 0$. Тогда $\Phi \in \text{Coker}(\delta_1 \mathcal{P})$, так что

$$0 = \int_M (P_-((\varphi^{-1})^* DA), \Phi)_g =$$

$$= \int_M (DA, \varphi^*(\Phi))_{\varphi^*g} = \int_M (A, D^*\tilde{\Phi})_{\varphi^*g}$$

для всех $A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$. Здесь $\tilde{\Phi} = \varphi^*(\Phi)$ и D^* — оператор, сопряженный к D относительно метрики φ^*g . Поскольку из эллиптической регулярности следует, что Φ — непрерывное отображение, мы имеем поточечное уравнение

$$(3.13) \quad D^*\tilde{\Phi} = 0.$$

Кроме того, $\Phi \in \text{Coker}(\delta_2 \mathcal{P})$, так что

$$0 = \int_M (P_-((\varphi^{-1})^*(\iota^*F_D)), \Phi)_g = \int_M (\iota^*F_D, \tilde{\Phi})_{\varphi^*g}$$

для всех $\iota \in \mathcal{C}$. Снова мы можем заключить, что поточечно

$$(3.14) \quad (\iota^*F_D, \tilde{\Phi})_{\varphi^*g} = 0.$$

Из уравнения (3.14) и леммы 3.7 следует, что $\text{Im}(F_D)$ и $\text{Im}(\tilde{\Phi})$ поточечно ортогональны. В частности, в каждой точке, где F_D и $\tilde{\Phi}$ не обращаются в нуль, одна из форм F_D или $\tilde{\Phi}$ имеет ранг 1.

Будем теперь использовать метрику φ^*g ; тогда форма $F = F_D$ автодуальна, $\tilde{\Phi}$ антиавтодуальна и $DF = D^*F = D\tilde{\Phi} = D^*\tilde{\Phi} = 0$. Следовательно, обе формы F и $\tilde{\Phi}$ аннулируются оператором $DD^* + D^*D$. На эллиптические операторы со скалярным символом распространяется теорема о единственности продолжения для эллиптических дифференциальных операторов [Ar]. Она показывает, что если F или $\tilde{\Phi}$ обращаются в нуль на открытом множестве, то они тождественно равны нулю. Предположим теперь, что $\tilde{\Phi} \neq 0$ и что в некоторой точке, где $\tilde{\Phi} \neq 0$, форма F имеет ранг 2. Следовательно, в некоторой окрестности этой точки F имеет ранг 2, а $\tilde{\Phi}$ имеет ранг 1. Представим $\tilde{\Phi}$ в виде $\tilde{\Phi} = \alpha \otimes u$, где $\alpha(x) \in \Omega_-^2(x)$, а $u(x) \in \text{ad } \eta_x$ с $|u(x)| = 1$. Тогда

$$(3.15) \quad 0 = D\tilde{\Phi} = d\alpha \otimes u + \alpha \wedge Du.$$

Из условия $|u| = 1$ вытекает, что

$$0 = \frac{1}{2} d(u, u) = (Du, u).$$

Стало быть,

$$d\alpha = -\alpha \wedge (Du, u) = 0,$$

и поэтому

$$\alpha \wedge Du = 0.$$

На основании леммы 3.5 мы можем выбрать в точке такой корепер θ^i , что

$$\alpha = \frac{|\alpha|}{2} (\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4).$$

Тогда, если

$$Du = \sum_i \theta^i \otimes w_i, \quad w_i \in \text{ad } \eta,$$

то

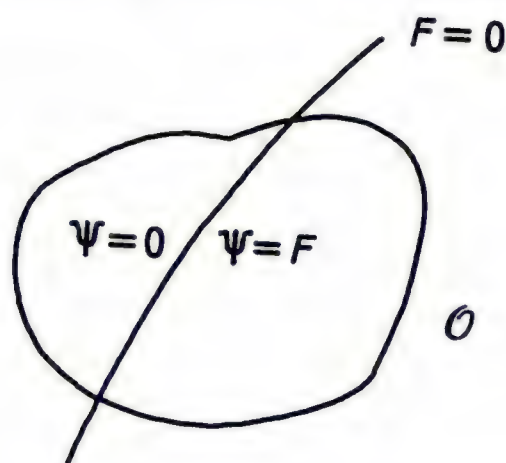
$$0 = \alpha \wedge Du = \frac{|\alpha|}{2} (\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \otimes w_3 + \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 \otimes w_4 - \\ - \theta^3 \wedge \theta^4 \wedge \theta^1 \otimes w_1 - \theta^3 \wedge \theta^4 \wedge \theta^2 \otimes w_2),$$

откуда $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$ и, значит, $Du = 0$. (Это утверждение: если $D(\alpha \otimes u) = 0$ и $|u| = 1$, то $Du = 0$ — будет снова использоваться в гл. 4, только там α будет автодуальной 2-формой. Отметим, что попутно мы получили еще один полезный факт: внешнее умножение на форму $\alpha: \Omega^1(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^3(\text{ad } \eta)$ обратимо.)

Так как $(F, u) = 0$, то $D^2u = [F, u] \neq 0$ в силу леммы 3.12. Это противоречие (с предположением $Du = 0$) показывает, что ранг F не превосходит 1. На плотном открытом множестве, где $F \neq 0$, представим F в виде $F = b \otimes u$ с $|u| = 1$; тогда, как и прежде, $Du = 0$. Если дополнение к множеству $\{F = 0\}$ связно, то можно последовательно продолжить u на $\{F = 0\}$, поскольку $Du = 0$. Но это противоречит условию (b) теоремы 3.1, так как связность D неприводима. Поэтому осталось только показать, что дополнение к множеству $\{F = 0\}$ связно. Предположим противное. Тогда на одной из связных компонент U

этого дополнения кривизна F лежит в ядре самосопряженного оператора $DD^* + D^*D$ и тождественно равна нулю на границе ∂U этой компоненты. Из вариационной характеристики собственных значений самосопряженных операторов следует, что первое собственное значение оператора $DD^* + D^*D$ на большей области M отрицательно [сн, с. 409]. (Такое явление хорошо известно в музыке: строй тромбона понижается по мере выдвижения кулисы.) Но это противоречит положительности оператора $DD^* + D^*D$.

Этот последний шаг доказательства можно было бы проделать иначе и доказать более сильное утверждение, а именно: множество $\{F = 0\}$ не разбивает никакой области $\mathcal{O} \subseteq M$.



В противном случае мы могли бы определить на $\mathcal{O}$ 2-форму Ψ , равную F на одной связной компоненте и тождественно равную нулю на другой. Так как форма F гладкая, то по теореме Стокса Ψ имеет обобщенную производную и, значит, $\Psi \in H_1(\mathcal{O})$. Следовательно, форма Ψ удовлетворяет уравнениям первого порядка $D\Psi = D^*\Psi = 0$; в силу эллиптической регулярности этой системы Ψ является гладкой формой. Но Ψ обращается в нуль на открытом множестве, нарушая принцип единственности продолжения. Это противоречие показывает, что форма F не может обращаться в нуль ни на каком подмногообразии коразмерности 1 (точно так же, как голоморфные функции не обращаются в нуль на кривых).

Теперь мы должны свести большое многообразие автодуальных связностей $\hat{\mathcal{SD}}_{l-1}$ к конечномерному пространству модулей. Первый шаг довольно прост.

Т е о р е м а 3.16. Факторпространство $\hat{\mathcal{SD}}_{l-1}/\mathcal{G}_l \cong \hat{\mathcal{X}}_{l-1} \times \mathcal{C}$ является многообразием.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Фиксируем точку $\langle D, \varphi \rangle \in \hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1} = \mathcal{P}^{-1}(0)$. Подобно тому, как это делалось в теореме 3.1, построим срез действия как множество тех связностей, которые переводятся в нуль оператором D^* . Более подробно, ограничим $\mathcal{P}$ до отображения

$$\bar{\mathcal{P}}: \{D+A \in \mathcal{A}_{\ell-1} : D^*A = 0\} \times \mathcal{C} \rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

где сопряжение в $\langle D+A, \varphi \rangle$ берется относительно метрики φ^*g . Рассмотрим эллиптический комплекс

$$0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \xrightarrow{\delta_1 \mathcal{P}} \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \rightarrow 0.$$

Имеем $\text{Ker } D^* \perp \text{Im } D$ и $\delta_1 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle} |_{\text{Im } D} \equiv 0$. Так как $\delta_1 \bar{\mathcal{P}}_{\langle D, \varphi \rangle} = \delta_1 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle} |_{\text{Ker } D^*}$, $\delta_2 \bar{\mathcal{P}}_{\langle D, \varphi \rangle} = \delta_2 \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}$ и $\delta \mathcal{P}_{\langle D, \varphi \rangle}$ — эпиморфизм, то дифференциал $\delta \bar{\mathcal{P}}_{\langle D, \varphi \rangle}$ также является эпиморфизмом. Более того, поскольку сюръективность является открытым условием, дифференциал $\delta \bar{\mathcal{P}}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ остается эпиморфизмом в целой окрестности $\mathcal{O}$ точки $\langle D, \varphi \rangle$. Следовательно, $(\delta \bar{\mathcal{P}})^{-1}(0) \cap \mathcal{O}$ — многообразие. По теореме 3.2 мы можем отождествить его с окрестностью точки $\langle D, \varphi \rangle$ в пространстве орбит $\mathcal{X}_{\ell-1}$. Тем самым $\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\mathcal{G}_\ell$ является подмногообразием в $\mathcal{X}_{\ell-1} \times \mathcal{C}$ (и, значит, хаусдорфовым подмногообразием).

Факторпространство $\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\mathcal{G}_\ell$ и есть наше параметризованное пространство модулей.

ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ

В предыдущих параграфах мы получили несколько различных многообразий связностей. Объединим их в следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{-1}(0) = \hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1} & \cong & \hat{\mathcal{A}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{P}} \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\mathcal{G}_\ell & \cong & \hat{\mathcal{X}}_{\ell-1} \times \mathcal{C} \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \bar{\pi} \\ \mathcal{C} & = & \mathcal{C} \end{array}$$

Отметим, что $\bar{\pi}^{-1}(\varphi) = \hat{\mathcal{M}}_\varphi$ является пространством модулей автодуальных связностей для метрики φ^*g .

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.17. Многообразие $\mathcal{C}$ содержит бэровское множество таких $\varphi \in \mathcal{C}$, для которых $\hat{\mathcal{M}}_\varphi$ — пятимерное многообразие.

Бэровским множеством мы называем счетное пересечение плотных открытых множеств. Следовательно, по теореме 3.17 множество хороших метрик плотно; отдельное рассуждение показывает, что оно, кроме того, и открыто. Разумеется, $\hat{\mathcal{M}}_\varphi$ является многообразием тогда, когда φ — регулярное значение отображения $\bar{\pi}: \hat{\mathcal{D}}_{l-1}/\mathcal{G}_l \rightarrow \mathcal{C}$. Поэтому причудливо сформулированная дифференциально-топологическая теорема 3.17 есть не что иное, как обычная теорема о неявной функции, но в бесконечномерном случае. Наши конструкции устроены так, что эта теорема непосредственно следует из теоремы Сарда — Смейла.

Т е о р е м а Сарда — С м е й л а [Sm]. Пусть $\bar{\pi}: E \rightarrow \mathcal{C}$ — фредгольмово отображение между паракомпактными банаховыми многообразиями. Тогда множество регулярных значений $\bar{\pi}$ является бэровским множеством в многообразии $\mathcal{C}$.

Отображение $\bar{\pi}$ мы называем фредгольмовым, если в каждой точке многообразия E дифференциал $\delta\bar{\pi}$ является фредгольмовым линейным отображением касательных банаховых пространств (это означает, что $\delta\bar{\pi}$ имеет конечномерное ядро, конечномерное коядро и замкнутый образ). Индексом отображения $\bar{\pi}$ в точке $x \in E$, обозначаемым через $\text{ind}(\bar{\pi})$, называется индекс $\text{ind}(\delta\bar{\pi}) = \dim \text{Ker}(\delta\bar{\pi}) - \dim \text{Coker}(\delta\bar{\pi})$ дифференциала $\delta\bar{\pi}$ в этой точке. Поскольку индекс $\text{ind}(\delta\bar{\pi})$ инвариантен относительно деформаций, в случае связного многообразия E он не зависит от выбора точки. Если φ — регулярное значение отображения $\bar{\pi}$, то $\bar{\pi}^{-1}(\varphi)$ является многообразием размерности $\text{ind}(\bar{\pi})$.

В интересующем нас случае $E = \hat{\mathcal{D}}_{l-1}/\mathcal{G}_l$ и $\mathcal{C} = C^k(\text{GL}(TM))$ — паракомпактные банаховы многообразия по построению. Стало быть,

для доказательства теоремы 3.17 нужно всего лишь показать, что $\bar{\pi}$ — фредгольмово отображение индекса 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.17. Проще всего вычислить индекс отображения $\bar{\pi}$ в точке $\langle \overline{D}, id \rangle$. (Черта обозначает орбиту точки $\langle D, id \rangle$ относительно группы калибровочных преобразований.) Касательное пространство к многообразию $\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}$ в точке $\langle D, id \rangle$ имеет вид

$$T_{\langle D, id \rangle}(\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}) = \{ \langle A, \tau \rangle \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \oplus \mathfrak{c} : \delta_1 \mathcal{P}(A) + \delta_2 \mathcal{P}(\tau) = 0 \}.$$

Касательное пространство к фактормногообразию $\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\mathfrak{G}_\ell$ может быть интерпретировано как касательное пространство к нашему срезу:

$$T_{\langle \overline{D}, id \rangle}(\hat{\mathcal{SD}}_{\ell-1}/\mathfrak{G}_\ell) = \{ \langle A, \tau \rangle : \delta_1 \mathcal{P}(A) + \delta_2 \mathcal{P}(\tau) = 0, D^*A = 0 \}.$$

Очевидно, что $\delta \bar{\pi}(A, \tau) = \tau$. Поэтому

$$\text{Ker } \delta \bar{\pi} = \{ \langle A, \tau \rangle : \delta_1 \mathcal{P}(A) = D^*A = \tau = 0 \} \quad \text{и}$$

$$\text{Im } \delta \bar{\pi} = (\delta_2 \mathcal{P})^{-1} \{ \text{Im } \delta_1 \mathcal{P} |_{\{D^*A=0\}} \}.$$

Рассмотрим еще раз эллиптический комплекс

$$(3.18) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta)_\ell \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \xrightarrow{\delta_1 \mathcal{P}} \Omega^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \rightarrow 0,$$

где $\delta_1 \mathcal{P} = P_- D$. Поскольку $\delta_1 \mathcal{P} \circ D = 0$, мы можем считать, что

$$(3.19) \quad \text{Im } \delta \bar{\pi} = (\delta_2 \mathcal{P})^{-1}(\text{Im } \delta_1 \mathcal{P}).$$

Оператор $\delta_1 \mathcal{P}$ имеет замкнутый образ и конечномерное коядро. Размерность коядра совпадает с размерностью $\mathfrak{h}^2$ двумерных когомологий комплекса (3.18). Так как $\delta \mathcal{P}$ — эпиморфизм, то из (3.19) легко следует, что образ $\text{Im } \delta \bar{\pi}$ также замкнут и его коразмерность равна $\mathfrak{h}^2$. Кроме того, $\text{Ker } \delta \bar{\pi}$ (спроектированное на первое слагаемое) есть в точности пространство одномерных когомологий комплекса (3.18) и имеет размерность $\mathfrak{h}^1$. Из теоремы 3.1 следует, что $\mathfrak{h}^0 = 0$. Наконец, по теореме Атьи — Зингера об индексе, примененной к эллиптическому комплексу (3.18), находим

$$h^0 - h^1 + h^2 = -5$$

(подробные вычисления можно найти в [ANS]). Собирая все это вместе, мы получаем, что $\delta\bar{\pi}$ — фредгольмов оператор индекса $h^1 - h^2 = 5$. Поэтому, чтобы завершить доказательство теоремы 3.17, остается лишь применить к $\bar{\pi}$ теорему Сарда — Смейла.

Всюду в этой главе мы для удобства пользовались метриками класса C^k с достаточно большим k . Отметим, однако, что можно было бы в конце концов считать все метрики бесконечно гладкими или даже вещественно аналитическими. Это следует из того факта, что «хорошие» C^k -метрики образуют открытое плотное множество. Чтобы это стало понятно, заметим, что h^2 — полунепрерывная сверху целочисленная функция на многообразии $\mathcal{X}_{\ell-1} \times \mathcal{C}$ (см. лемму 4.15). Это означает, в частности, что h^2 обращается в нуль на открытых множествах. В следующей главе мы докажем, что для m особых точек $\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \subset M$, точно так же как для неприводимых связностей в $\hat{M}$, обращение h^2 в нуль сигнализирует о существовании локальных координатных карт, хотя «картой» в точке p_i служит конус над $\mathbb{C}P^2$, а не евклидово пространство $\mathbb{R}^5$. Более того, мы покажем, что $h^2(p_i)$ обращается в нуль на плотном открытом множестве C^k -метрик. В гл. 8 будет доказано, что для некоторого подмножества $M_\lambda \subset M$ разность $M \setminus M_\lambda$ компактна, а из результатов гл. 9 будет следовать, что h^2 обращается в нуль на M_λ . Кроме того, оценки, приводящие к этим результатам, равномерны относительно малых шевелений в пространстве метрик класса C^k . Фиксируем хорошую метрику. Тогда можно покрыть окрестность U множества $M \setminus M_\lambda$ в $\mathcal{X}_{\ell-1}$ конечным числом таких открытых множеств, что h^2 обращается в нуль на U для всех близких метрик. Собирая все это вместе, пользуясь тем, что конечные пересечения открытых плотных множеств открыты и плотны, и замечая, что пространство модулей гладко зависит от метрики, мы получаем следующее

Предложение 3.20. Множество тех метрик класса C^k , для которых $\hat{M}$ является многообразием, открыто и плотно и, следовательно, содержит бесконечно гладкие (и аналитические) метрики.

Этот результат почти ничего не меняет в доказательстве теоремы Дональдсона, но обладает эстетической завершенностью.

Наше доказательство теоремы трансверсальности 3.17 годится для всех $SU(2)$ -расслоений. Мы нигде не использовали ни класс Чжэня c_2 , ни форму пересечений ω , ни размерность $\mathcal{M}$, хотя и опирались на то, что группа $SU(2)$ имеет малую размерность. В действительности это доказательство применимо и к $SO(3)$ -расслоениям. Для $U(1)$ -расслоений имеем

С л е д с т в и е 3.21. Пусть форма пересечений ω неопределенна. Тогда для открытого плотного множества метрик на линейных расслоениях не существует ни автодуальных, ни антиавтодуальных связностей.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Это следствие получается дословным повторением (применительно к данному случаю) доказательств теорем 3.4 и 3.16. Единственное отличие — это вычисление индекса из теоремы 3.17. Для линейных расслоений эллиптический комплекс (3.18) сводится к комплексу

$$(3.22) \quad 0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d_-} \Omega_-^2 \rightarrow 0,$$

поскольку присоединенное расслоение тривиально. Как было показано в работе [ANS], индекс комплекса (3.22) равен $\frac{1}{2}(\chi - \tau)$, где χ — эйлерова характеристика, а τ — сигнатура базового многообразия. Обозначим через b_- размерность максимального подпространства, на котором форма пересечений ω отрицательно определена. Тогда, как легко видеть, $\frac{1}{2}(\chi - \tau) = 1 + b_-$.

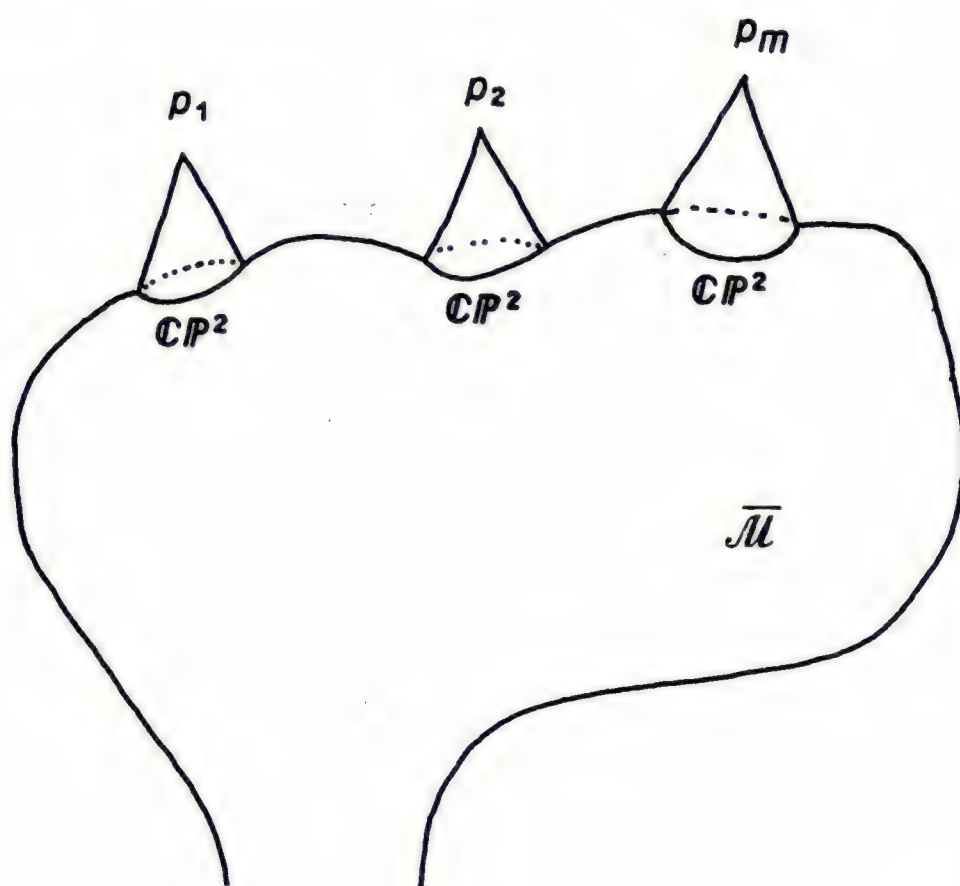
(Тот факт, что $\frac{1}{2}(\chi - \tau)$ есть аналитический индекс, непосредственно вытекает из двойственности Пуанкаре.) Но $h^0 = 1$ (постоянные функции), так что мы интересуемся размерностью $h^1 - h^2 = -b_-$ (ср. с доказательством теоремы 3.17). Если $b_- > 0$, то несуществование автодуальных решений следует прямо из теоремы Сарда — Смейла. Несуществование антиавтодуальных решений получается из неравенства $b_+ > 0$ обращением ориентации базового многообразия и дословным повторением предыдущего рассуждения.

Разумеется, в случае неопределенной формы пересечений существуют решения уравнений Янга — Миллса, доставляемые теорией Ходжа. Поэтому неопределенный случай представляет собой пример, в котором не достигается топологическая нижняя грань из гл. 2.

Глава 4

КОНУСЫ НАД $\mathbb{C}P^2$

В предыдущей главе мы показали, что для плотного множества метрик множество $\hat{\mathcal{M}}$ неприводимых автодуальных связностей в пространстве модулей $\mathcal{M}$ является гладким многообразием. Теперь мы исследуем особые точки $\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \subseteq \mathcal{M}$, отвечающие приводимым связностям. Мы покажем, что после некоторого шевеления пространства $\mathcal{M}$, которое можно проделать либо «вручную», либо возмущая метрику, окрестность каждой особой точки станет гомеоморфной открытому конусу над $\mathbb{C}P^2$.



Более того, эти гомеоморфизмы можно сделать гладкими вне особых точек. В частности, этим доказывается существование вблизи приводимых решений неприводимых автодуальных связностей. Вырезав открытые окрестности особых точек и вклеив на их места m экземпляров комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, мы получим половину

кобордизма (2.23) между M и $\sqcup^m \mathbb{C}P^2$. Останется лишь показать, что $\bar{M}$ — ориентированное многообразие и что $\partial\bar{M} = M$; это будет сделано в гл. 5 — 9. Поскольку в этой главе многие рассуждения параллельны соответствующим рассуждениям гл. 3, мы часто опускаем некоторые детали (например, соболевские индексы).

СНОВА О СРЕЗАХ

Вспомним сначала основные свойства приводимых связностей. Из теоремы 3.1 мы знаем, что группа $\mathfrak{G}/\mathbb{Z}_2$ свободно действует на неприводимых связностях $\hat{\mathcal{A}}$. Стационарная подгруппа $\mathfrak{G}_D \subseteq \mathfrak{G}$ приводимой связности D изоморфна S^1 . В большинстве случаев удобнее рассматривать факторгруппу $S_D = \mathfrak{G}_D/\mathbb{Z}_2 \simeq S^1$, поскольку она свободно действует на соседних неприводимых связностях.

Алгеброй Ли группы $\mathfrak{G}_D$ является одномерное ядро оператора

$$(4.1) \quad D: \Omega^0(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \eta),$$

представляющее нульмерные когомологии H_D^0 уже знакомого нам эллиптического комплекса

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta) \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \eta) \xrightarrow{P-D} \Omega^2(\text{ad } \eta) \rightarrow 0.$$

Так как комплекс (4.2) $\mathfrak{G}_D$ -эквивариантен, то группа $\mathfrak{G}_D$ действует на всех его группах когомологий. Действие на H_D^0 тривиально. В предложении 4.9 мы определим действие $\mathfrak{G}_D$ на группах когомологий H_D^1 и H_D^2 . (В последующем мы будем отождествлять классы когомологий с представляющими их гармоническими формами.)

Срезы

$$\mathcal{X}_D = \{A \in \Omega^1(\text{ad } \eta): D^*A = 0\}$$

задают систему локальных карт для $\mathcal{X}$ вблизи неприводимых связностей. В приводимом случае нужно принять во внимание S^1 -симметрию. Вспомним стационарную подгруппу

$$\mathfrak{G}_D = \{t = \exp \theta u: Du = 0, |u| = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Поскольку $Dt = 0$, эта группа действует на $\mathcal{X}_D$ по правилу

$$(4.3) \quad A \mapsto t^{-1}At.$$

Кроме того, естественное действие группы $\mathfrak{G}_D$ на своей алгебре Ли — это сопряжение

$$z \mapsto t^{-1} z t.$$

В любой соболевской норме на $\Omega^i(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$, построенной с помощью ковариантного дифференцирования, группа $\mathfrak{G}_D$ действует ортогональными преобразованиями, поскольку t поточечно унитарно и параллельно.

Т е о р е м а 4.4. Пусть D — приводимая связность и $\bar{D}$ — ее орбита в пространстве $\mathcal{X}$. Тогда для достаточно малой окрестности $\mathcal{O}_{\bar{D}}$ точки $\bar{D}$ в $\mathcal{X}$ существует локальный гомеоморфизм

$$\mathcal{O}_{\bar{D}} \simeq \mathcal{X}_D / \mathfrak{G}_D,$$

гладкий вне особой точки $\bar{D} \in \mathcal{O}_{\bar{D}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Мы копируем доказательство теоремы 3.2. Определим отображение

$$L_D: \Omega^1(\text{ad } \eta) \times \mathfrak{G} \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta),$$

полагая

$$L_D \langle A, z \rangle = D^*(z^{-1} D z + z^{-1} A z).$$

Частный дифференциал $\delta_2 L_D = D^* D$ в направлении z имеет ядро H_D^0 . Ограничим наше отображение на L^2 -ортогональное дополнение $H_D^{0\perp}$, т.е. на образ оператора D^* в $\Omega^0(\text{ad } \eta)$; тогда частный дифференциал ограничения

$$\tilde{L}_D: \Omega^1(\text{ad } \eta) \times \exp\{H_D^{0\perp}\} \rightarrow H_D^{0\perp}$$

обратим в точке $\langle 0, id \rangle$. Следовательно, для достаточно малого $\tilde{A} \in \Omega^1(\text{ad } \eta)$ уравнение $\tilde{L}_D(\tilde{A}, z) = 0$ имеет единственное решение

$$z = \exp u \in \exp\{H_D^{0\perp}\}$$

и решение $A = f(\tilde{A})$ уравнений

$$(4.5) \quad A = z^{-1} D z + z^{-1} \tilde{A} z,$$

$$D^* A = 0$$

гладко зависит от $\tilde{A}$. Присоединенное действие элемента $t \in \mathfrak{G}_D$ на H_D^0 тривиально (поскольку $Dt = 0$), поэтому $\text{ad } t$ отображает ортогональное дополнение $H_D^{0\perp}$ в себя. То же самое утверждение верно и на групповом уровне: сопряжение с помощью элемента t отображает подгруппу $\exp\{H_D^{0\perp}\}$ в себя. Таким образом, если A удовлетворяет уравнениям (4.5), то мы имеем также

$$t^{-1} A t = (t^{-1} z t)^{-1} D (t^{-1} z t) + (t^{-1} z t)^{-1} (t^{-1} \tilde{A} t) (t^{-1} z t),$$

$$D^*(t^{-1} A t) = 0.$$

Отсюда следует, что $f(\text{ad } t \cdot \tilde{A}) = \text{ad } t \cdot f(\tilde{A})$, а из этой эквивариантности мы получаем $\mathcal{X}_D / \mathfrak{G}_D \cong \mathcal{O}_D / \mathfrak{G}$. (Мы опустили доказательство того, что $\mathcal{X}_D / \mathfrak{G}_D$ вкладывается в факторпространство; оно подобно соответствующему доказательству из гл. 3.)

СТРУКТУРА ОСОБОЙ ТОЧКИ

Вблизи особой точки пространство модулей локально имеет вид ядра отображения

$$(4.6) \quad \begin{aligned} P_- F: \mathcal{X}_D &\rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta), \\ A &\mapsto P_-(DA + A \wedge A), \end{aligned}$$

профакторизованного по действию группы $\mathfrak{G}_D$. Линеаризацией отображения $P_- F$ в точке $A \in \mathcal{X}_D$ является оператор $P_- D$, входящий в комплекс (4.2). Из эллиптичности вытекает, что ограничение $P_- D$ на $\mathcal{X}_D$ есть (линейный) фредгольмов оператор. Следовательно, $P_- F$ есть (нелинейное) фредгольмово отображение (см. обсуждение, следующее за теоремой 3.17). Сформулированное ниже свойство конечности представляет собой основной шаг в доказательстве теоремы Сарда – Смейла [K], [Sm], [D].

Л е м м а 4.7. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — нелинейное фредгольмово отображение гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y , $\varphi(0) = 0$ и $T = (d\varphi)_0: X \rightarrow Y$ — дифференциал φ в начале координат. Тогда существуют такие разложения пространств X и Y

$$X = \text{Ker } T \oplus X', \quad Y = \text{Im } T \oplus Y'$$

и отображение

$$\varphi: X \rightarrow Y',$$

что φ эквивалентно в окрестности начала координат отображению $T + \varphi$, причем эта эквивалентность задается диффеоморфизмом пространства X . Более того, если на X и Y ортогональными преобразованиями действует группа G и отображение φ эквивариантно, то X' и Y' являются G -инвариантными подпространствами, а φ G -эквивариантно.

Другими словами, фредгольмово отображение локально эквивалентно сумме линейного отображения и нелинейного отображения с конечномерным образом. Теорема Сарда — Смейла получается из леммы 4.7 применением обычной теоремы Сарда к конечномерному отображению φ . В нашем случае ситуация значительно упрощается тем, что особые точки изолированы.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку T — фредгольмово отображение, подпространство $\text{Ker } T$ конечномерно, а $\text{Im } T$ замкнуто и имеет конечную коразмерность; кроме того, корректно определены ортогональные дополнения X' и Y' . По теореме об открытом отображении $T|_{X'}$ имеет однозначное ограниченное обратное $T^{-1}: \text{Im } T \rightarrow X'$. Продолжим T^{-1} на все пространство Y , полагая $\tilde{T} = T^{-1}(1 - \pi_C)$, где $\pi_C: Y \rightarrow Y'$ — конечномерная ортогональная проекция на коядро отображения T . Пусть $\pi_K: X \rightarrow \text{Ker } T$ — ортогональная проекция на ядро T . Тогда отображение

$$\chi: X \rightarrow X, \quad x \mapsto \pi_K(x) + \tilde{T}(\varphi(x)),$$

является локальным диффеоморфизмом в точке 0 . Имеем

$$(T \circ \chi)(x) = (1 - \pi_C)(\varphi(x)).$$

Если положить

$$\varphi(y) = \pi_c(\psi(\chi^{-1}(y))),$$

то мы получим искомую эквивалентность

$$\psi \circ \chi^{-1} = T + \varphi.$$

То, что $\varphi(0)$ и $(d\varphi)_0$ обращаются в нуль, очевидно. Эквивариантность φ следует из эквивариантности отображений ψ, T .

Применим эту лемму к отображению (4.6), которое выделяет антиавтодуальную кривизну на срезе, проходящем через связность D . Линеаризацией этого отображения в нуле служит оператор $P_- D|_{\text{Ker } D^*}$. Поскольку (4.2) – эллиптический комплекс, этот оператор фредгольмов. Более того, отображение $P_- F$ является $\mathfrak{G}_D$ -эквивариантным, а так как $\mathfrak{G}_D$ действует поворотами, то пространство модулей в окрестности D имеет вид $(P_- D + \bar{\varphi})^{-1}(0)/\mathfrak{G}_D$ для некоторого $\mathfrak{G}_D$ -эквивариантного конечномерного отображения

$$\bar{\varphi}: \text{Ker } D^* \rightarrow (\text{Im } P_- D)^\perp.$$

Тем самым нами доказано

С л е д с т в и е 4.8. Пусть D – приводимая автодуальная связность. Тогда в окрестности D пространство модулей гомеоморфно пространству $\varphi^{-1}(0)/\mathfrak{G}_D$ для некоторого $\mathfrak{G}_D$ -эквивариантного локального отображения

$$\varphi: H_D^1 \rightarrow H_D^2.$$

Здесь H_D^1 и H_D^2 – одномерные и двумерные когомологии комплекса (4.2). Разумеется, в формулировке следствия эти когомологии отождествляются с гармоническими пространствами комплекса. Отметим также, что пространство $\varphi^{-1}(0)/\mathfrak{G}_D$ локально диффеоморфно пространству модулей, за исключением начала координат.

Так как $(d\varphi)_0 = 0$, то из обычной теоремы о неявной функции вытекает, что при $H_D^2 = 0$ пространство $\varphi^{-1}(0)$ локально является многообразием. В следующем предложении мы описываем структуру пространств H_D^1 и H_D^2 в явном виде. Мы

сформулируем его в более общем виде, чтобы выделить используемые топологические предположения.

Предложение 4.9. Для приводимой связности D существуют вещественные изоморфизмы

$$H_D^1 \simeq \mathbb{C}^q,$$

$$H_D^2 \simeq \mathbb{C}^p \oplus P_- H_{DR}^2(M),$$

относительно которых группа $S_D \simeq S^1$ стандартно действует на $\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^p$ и тривиально действует на $P_- H_{DR}^2(M)$. Если $P_- H_{DR}^2(M) = 0$, то $q = p + 3$.

Доказательство. Прежде всего найдем неподвижные точки действия группы S_D на пространствах H_D^1 и H_D^2 . Предположим, что элемент $u \in \Omega^0(\text{ad } \eta)$, $|u| = 1$, порождает одномерное ядро оператора D . Если $A \in H_D^1$ — неподвижная точка, то $[u, A] = 0$, откуда следует, что $A = \theta \otimes u$ для некоторого $\theta \in \Omega^1$. Применяя рассуждения, подобные тем, которые мы использовали при доказательстве формулы (3.15), можно показать, что $d^* \theta = P_- d\theta = 0$. Следовательно, форма $d\theta$ автодуальна. По теореме Стокса

$$0 = \int_M d(\theta \wedge d\theta) = \int_M d\theta \wedge d\theta = \int_M d\theta \wedge * d\theta = \int_M |d\theta|^2 * 1,$$

откуда $d\theta = 0$. Значит, форма θ гармонична, а так как мы предполагаем, что $H_{DR}^1(M) = 0$, то $A = 0$. Аналогично, неподвижная точка в H_D^2 имеет вид $\alpha \otimes u$, где $\alpha \in \Omega_-^2$ — гармоническая форма. Следовательно, множество неподвижных точек отождествляется с множеством $P_- H_{DR}^2(M)$ антиавтодуальных двумерных когомологий многообразия M . Заметим, что если форма пересечений M положительно определена, то $P_- H_{DR}^2(M) = 0$.

Любое пространство V линейного представления группы S^1 разлагается в прямую сумму $V = V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{R}}$, где S^1 тривиально действует на $V_{\mathbb{R}}$, а $V_{\mathbb{C}}$ является прямой суммой одномерных комплексных представлений. Кроме того, единственным линейным не-

приводимым действием группы S^1 , которое свободно вне начала координат, служит стандартное представление S^1 на $\mathbb{C}$. Поэтому

$$H_D^1 \simeq \mathbb{C}^q \oplus V_1,$$

$$H_D^2 \simeq \mathbb{C}^p \oplus V_2$$

для некоторых вещественных пространств V_1, V_2 . Из сказанного выше о неподвижных точках следует, что $V_1 = 0$ и $V_2 = P_- H_{DR}^2(M)$. Наконец, если $P_- H_{DR}^2(M) = 0$, то по теореме Атьи – Зингера об индексе, примененной к комплексу (4.2), получаем $q = p + 3$.

Теперь мы в состоянии полностью описать локальную структуру пространства $\mathcal{M}$ вблизи особых точек в случае, когда двумерные когомологии обращаются в нуль.

С л е д с т в и е 4.10. Предположим, что $H_D^2 = 0$. Тогда вблизи начала координат пространство $\varphi^{-1}(0)/\mathfrak{G}_D$ гомеоморфно конусу над $\mathbb{C}P^2$, причем вне вершины этот гомеоморфизм является диффеоморфизмом.

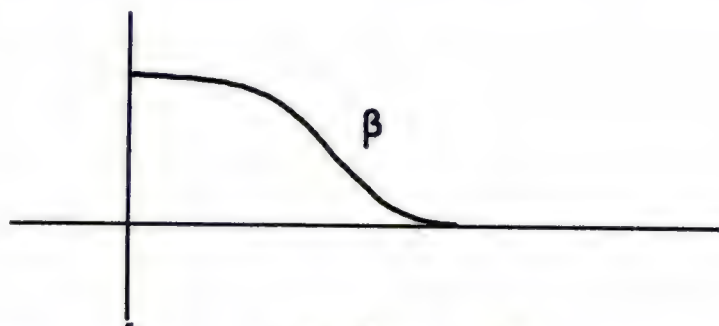
Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего $H_D^1 \simeq \mathbb{C}^3$ и группа $S_D \simeq S^1 \subset \mathbb{C}$ действует умножением. Из следствия 4.8 и теоремы о неявной функции вытекает, что вблизи начала координат $\varphi^{-1}(0)/S_D = \mathbb{C}^3/S^1$, где S^1 отождествлено с $\mathbb{C}^*$. Так как $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, то пространство орбит $\mathbb{C}^3/S^1 = \mathbb{C}P^2 \times [0, 1]/\langle x, 0 \rangle \sim \langle x', 0 \rangle$ является открытым конусом над $\mathbb{C}P^2$. Наконец, $\varphi^{-1}(0)/\mathfrak{G}_D = \varphi^{-1}(0)/S_D$, поскольку центр $\mathbb{Z}_2 \subset \mathfrak{G}_D$ действует тривиально.

После этой подготовительной работы уже нетрудно «вручную» построить пошевеленное пространство модулей $[D]$. Заметим, что $P_- H_{DR}^2(M) = 0$, так как начиная с этого места мы предполагаем, что многообразие M имеет положительно определенную форму пересечений.

Т е о р е м а 4.11. Можно так пошевелить пространство $\mathcal{M}$, что локально, вблизи некоторой приводимой автодуальной связности,

оно окажется гомеоморфным открытому конусу над $\mathbb{C}P^2$. При этом локальный гомеоморфизм будет диффеоморфизмом вне вершины конуса.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточно рассмотреть каждую особую точку в отдельности. Пошелем отображение $\varphi: \mathbb{C}^{p+3} \rightarrow \mathbb{C}^p$. Пусть $L: \mathbb{C}^{p+3} \rightarrow \mathbb{C}^p$ — сюръективное линейное отображение и β — сглаживающая функция



Определим отображение $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}^{p+3} \rightarrow \mathbb{C}^p$, полагая

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + \varepsilon^2 \beta\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) L(z)$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что отображение $\tilde{\varphi}$ является $\mathfrak{G}_D$ -эквивариантным, а его дифференциал $(d\tilde{\varphi})_0 = L$ сюръективен. Поэтому в малой окрестности начала координат $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ будет гладким шестимерным многообразием. Пошелеванное пространство модулей будет иметь вблизи начала координат вид $\tilde{\varphi}^{-1}(0)/S^1$. Требуемый результат получается теперь дословным повторением рассуждений, использованных при доказательстве следствия 4.10.

В следующем разделе мы предложим еще один подход к вопросу о типичности.

ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ

Фиксируем на многообразии M метрику g . В этом разделе мы изучим когомологии $H_{D_i}^2$ в каждой из особых связностей $D_1, \dots, D_m$ (появляющихся из расщепления $\eta = \lambda \oplus \lambda^{-1}$) и докажем, что эти группы когомологий обращаются в нуль для типичной метрики. Тогда следствие 4.10 даст нам локальную структуру пространства модулей $\mathcal{M}$ в окрестности точки $\bar{D}_i$. Фиксируем номер i и положим $h_i^2 = \dim H_{D_i}^2$. Для $D = D_i$ мы имеем форму кривизны $F = F_D = \mathfrak{b} \otimes u$ (ранга 1 как оператор), $\mathfrak{b} \in \Omega_+^2$, $u \in \Omega^0(\text{ad } \eta)$, $|u| = 1$. В силу тождества Бьянки

$$0 = DF = d\sigma \otimes u + \sigma \wedge Du,$$

откуда

$$(4.12) \quad d\sigma = Du = 0,$$

как и в (3.15); другими словами, форма σ гармонична и сечение u параллельно. Напомним, что оператор

$$D: \Omega^0(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \eta)$$

имеет одномерное ядро, которое в нашем случае порождается сечением u . Следовательно, имеет место ортогональное расщепление

$$\text{ad } \eta = \mathbb{R} \cdot u \oplus \zeta.$$

Оператор D тривиально действует на линейном расслоении $\mathbb{R} \cdot u$. Легко видеть, что $\zeta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ изоморфно расслоению η с индуцированной связностью. Стало быть, можно разложить комплекс (4.2) в прямую сумму обычного антиавтодуального комплекса Де Рама

$$(4.13) \quad 0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d_-} \Omega^2_- \rightarrow 0$$

и комплекса

$$(4.14) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(\zeta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Omega^1(\zeta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Omega^2_-(\zeta) \rightarrow 0.$$

Здесь $d_- = P_- d$ и $\mathcal{D} = P_- D$; впредь мы будем использовать эти обозначения без особых оговорок. Из положительной определенности формы пересечений вытекает, что индекс эллиптического комплекса (4.13) равен 1 и его когомологии представляются постоянными функциями в Ω^0 . (Если $P_- H^2_{DR}(M) \neq 0$, то из доказательства следствия 3.21 можно вывести, что в общем положении в пространстве модулей нет особых точек, а значит, не существует и вклада комплекса (4.13) в группу H^2_D .) Поэтому мы будем изучать комплекс (4.14), индекс которого, как нетрудно показать, равен -6. Мы установим, что $h^2 = \dim \text{Coker } \mathcal{D}$ обращается в нуль на плотном множестве метрик. К сожалению, для доказательства нельзя использовать теорему трансверсальности из предыдущей главы, поскольку мы попали как раз в ту ситуацию, когда F имеет ранг 1 и $(F, \Phi) = 0$. Однако теперешняя наша проблема намного легче, так как вместо сложных множеств решений мы имеем всего лишь m дискретных решений, гладко зависящих от метрики.

Из нашей первой леммы следует, что множество метрик, для которых $h^2 = 0$, является открытым.

Л е м м а 4.15. Операторы D и $\mathcal{D}$ гладко зависят от метрики g , и функция $h^2(g)$ полунепрерывна сверху:

$$\overline{\lim}_{g \rightarrow g_0} h^2(g) \leq h^2(g_0).$$

Разумеется, оператор $\mathcal{D}$ определен лишь с точностью до калибровочного преобразования, поэтому речь идет о его гладкости на пространстве орбит $\mathcal{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Гладкая зависимость D и $\mathcal{D}$ от метрики следует из того факта, что нуль является регулярным значением отображения P_-F на линейном расслоении λ (см. теорему 3.4). Ясно, что и само пространство $\Omega_-^2(\zeta)$ гладко зависит от метрики. Функция $h^2(g)$ представляет собой размерность ядра оператора $\mathcal{D}\mathcal{D}^*: \Omega_-^2(\zeta) \rightarrow \Omega_-^2(\zeta)$. Так как этот оператор эллиптический, он имеет дискретный спектр; следовательно, $h^2(g)$ полунепрерывна сверху (точно так же, как для конечномерных матриц; доказательство для эллиптических операторов немедленно получается из леммы 4.7).

Докажем теперь, что одномерные когомологии комплекса (4.14), а точнее, их образы относительно оператора D , в некотором смысле типично расположены в направлениях (в M), не «параллельных» кривизне. Заметим, что если форма $A \in \Omega^1(\zeta)$ точна, т.е. $A = Dv$, то ее дифференциал

$$DA = D^2v = [F, v] = [\mathfrak{c} \otimes u, v] = \mathfrak{c} \otimes [u, v]$$

параллелен F . Для типичных метрик справедливо обратное утверждение.

Л е м м а 4.16. Существует такое открытое плотное множество метрик класса C^k , что если форма $A \in \Omega^1(\zeta)$ удовлетворяет условию $\mathcal{D}A \doteq 0$ и если $DA = \mathfrak{c} \otimes w$ на открытом множестве, где $F \neq 0$, то $A = Dv$ для некоторого $v \in \Omega^0(\zeta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку оператор D не имеет ядра в ζ , эллиптическое уравнение $D^*(A - Dv) = 0$ обладает единственным решением $v \in \Omega^0(\zeta)$. Тогда для $\tilde{A} = A - Dv$ форма

$$(4.17) \quad D\tilde{A} = DA - [F, v] = \mathfrak{b} \otimes (w - [\mu, v]) = \mathfrak{b} \otimes \tilde{w}$$

параллельна форме кривизны F и $\tilde{A}$ гармонична, т.е.

$$(4.18) \quad \mathcal{D}\tilde{A} = D^*\tilde{A} = 0.$$

Покажем, что для открытого плотного множества метрик уравнения (4.17) и (4.18) означают, что $\tilde{A} = 0$.

Почти очевидно, что множество метрик открыто. В самом деле, существование формы $\tilde{A} \neq 0$, удовлетворяющей уравнениям (4.17) и (4.18), является замкнутым условием. Чтобы доказать этот факт, заметим, что $\mathfrak{b}$, $\mathcal{D}$ и D^* гладко зависят от метрики и мы можем использовать слабую компактность множества решений эллиптических уравнений для выделения из последовательности решений слабо сходящейся подпоследовательности.

Чтобы доказать, что множество «хороших» метрик плотно, рассмотрим аналитические метрики. Тогда $\mathfrak{b}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ станут аналитическими функциями. Следовательно, корректно определено множество нулей $\mathfrak{b}$; в частности, оно имеет нулевую меру. Так как для элементов алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ имеет место тождество $[\mu, [\mu, \tilde{w}]] = -\tilde{w}$, то

$$D\tilde{A} = [F, \tilde{v}],$$

где $\tilde{v} = -[\mu, \tilde{w}]$. Таким образом,

$$[F \wedge \tilde{A}] = D^2\tilde{A} = D[F, \tilde{v}] = [F \wedge D\tilde{v}].$$

Но точно так же, как в доказательстве теоремы 3.4, умножение на автодуальную форму $\mathfrak{b}$ является обратимым оператором из Ω^1 в Ω^3 , а поскольку $\mu \notin \zeta$, то F обратимо действует из $\Omega^1(\zeta)$ в $\Omega^3(\zeta)$. Следовательно, $\tilde{A} = D\tilde{v}$ на множестве, где $F \neq 0$. Кроме того, сечение $\tilde{v}$ однозначно определено и аналитично на этом множестве и норма $|\nabla^{\sharp}\tilde{v}|$ ограничена нормой $|\nabla^{\sharp-1}\tilde{A}|$. Поэтому с помощью разложения в степенные ряды $\tilde{v}$ продолжается на множество нулей формы F . Но тогда $D^*\tilde{A} = D^*D\tilde{v} = 0$ всюду, откуда $\tilde{v} = 0$. Следовательно, $\tilde{A} = 0$ и $A = Dv$.

Перейдем теперь к нашему основному результату.

Т е о р е м а 4.19. Для открытого плотного множества C^k -метрик h^2 обращается в нуль в каждой особой точке пространства модулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как конечные пересечения открытых плотных множеств являются открытыми и плотными, то достаточно рассмотреть каждую приводимую связность по отдельности. Кроме того, мы можем ограничиться открытым плотным множеством из леммы 4.16. Хотя рассматриваемое нами линейное приближение значительно проще нелинейной ситуации из гл. 3, мы по-прежнему будем пользоваться техникой трансверсальности.

Рассмотрим отображение

$$Q: \Omega^1(\zeta) \setminus \{0\} \times \mathcal{C} \rightarrow \Omega^0(\zeta) \oplus \Omega^2_-(\zeta),$$

$$\langle A, \varphi \rangle \mapsto \langle D^*((\varphi^{-1})^*A), P_-((\varphi^{-1})^*DA) \rangle.$$

Здесь $\mathcal{C}$ — пространство автоморфизмов класса C^k касательного расслоения (см. теорему 3.4), а оператор D неявно определен как автодуальное решение относительно метрики φ^*g . Сказанное выше позволяет утверждать, что прообраз $Q^{-1}(0)$ состоит из ненулевых одномерных когомологий $H^1_D(\zeta)$ относительно φ^*g . Если мы покажем, что нуль является регулярным значением отображения Q , то тем самым установим, что для типичной метрики размерность линейного пространства $H^1_D(\zeta)$ равна 6. (Проекция $Q^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{C}$ имеет индекс 6, и так же, как в 3.17, мы можем применить теорему Сарда — Смейла.) Следовательно, для таких метрик $h^2 = 0$.

Пусть $\langle \nu, \Phi \rangle \in \text{Coker } \delta Q_{\langle A, \varphi \rangle}$, где $Q\langle A, \varphi \rangle = 0$. Рассмотрим инфинитезимальные вариации $\gamma \in \mathcal{C}$ из алгебры Ли группы $\mathcal{C}$, сохраняющие кривизну, т.е. удовлетворяющие соотношению $\gamma^*F = 0$. Для таких вариаций

$$\delta_2 Q_{\langle A, \varphi \rangle}(\gamma) = \langle D^*((\varphi^{-1})^*(\gamma^*A)), P_-((\varphi^{-1})^*(\gamma^*DA)) \rangle.$$

Тогда, полагая $\tilde{\Phi} = \varphi^*(\Phi)$ и обозначая через D^* оператор, сопряженный к D относительно метрики φ^*g , мы получаем уравнения

$$(4.20) \quad Dv = 0,$$

$$(4.21) \quad D^* \tilde{\Phi} = 0,$$

$$(4.22) \quad (\iota^* DA, \tilde{\Phi})_{\varphi^*g} = 0,$$

аналогичные уравнениям (3.13), (3.14). Так как оператор D не имеет ядра в ζ , то из уравнения (4.20) следует, что $v = 0$. Кроме того, лемма 4.16 означает, что в тех точках, в которых $DA = \epsilon \otimes \omega$ совпадает с кривизной и $F \neq 0$, обращается в нуль форма A . Но мы исключили из нашей области форму $A \equiv 0 \in \Omega^1(\zeta)$. Поэтому в силу единственности продолжения (теорема 6.38) формы A и F не обращаются в нуль на открытых множествах. Следовательно, существует такое открытое множество U , на котором $DA \neq \epsilon \otimes \omega$ и $F \neq 0$. Фиксируем репер, в котором $\epsilon = \epsilon^{13}$; это возможно по лемме 3.5. Тогда

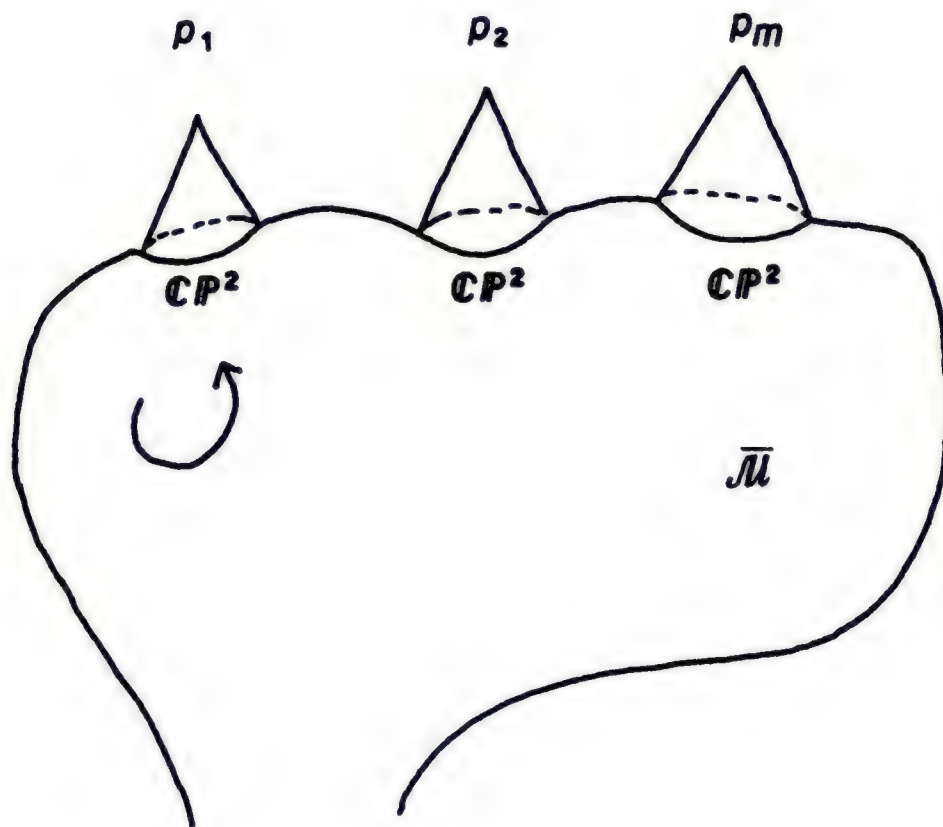
$$F = \epsilon^{13} \otimes u, \quad DA = \sum_{i=2}^4 \epsilon^{1i} \otimes \omega_i, \quad \Phi = \sum_{j=2}^4 \alpha^{1j} \otimes \Phi_j$$

и по крайней мере одно из сечений ω_2 или ω_4 не равно нулю. Для определенности будем считать, что $\omega_2 \neq 0$. Пользуясь в уравнении (4.22) преобразованиями (3.8) и (3.10) и вспоминая, что $\iota^* F = 0$, мы находим, что $(\omega_2, \Phi_j) = 0$. Поскольку ζ — двумерное расслоение, это означает, что Φ имеет в области U ранг 1. С помощью уравнения (4.21) и рассуждений, применявшихся при выводе соотношения (3.15), мы заключаем, что $\Phi = 0$ на области U . В силу единственности продолжения форма Φ обращается в нуль всюду, так что нуль является регулярным значением отображения Q . Теорема 4.19 доказана.

Глава 5

ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

Теорема Дональдсона опирается на инвариантность сигнатуры многообразия относительно ориентированного кобордизма. В этой главе мы доказываем, что гладкое многообразие $\hat{\mathcal{M}}$, которое применяется для построения кобордизма $M \sim \bigsqcup^m \mathbb{C}P^2$, является ориентируемым.



Используя естественное вложение $\hat{\mathcal{M}} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$, мы показываем, что $T\hat{\mathcal{M}}$ является ориентируемым расслоением, построив для него ориентируемое продолжение на все многообразие $\hat{\mathcal{X}}$:

$$\begin{array}{ccc} T\hat{\mathcal{M}} & \hookrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathcal{M}} & \cong & \hat{\mathcal{X}} \end{array}$$

Расслоение ξ — это эквивариантное индексное расслоение нелинейного эллиптического комплекса $\{D^*, P, F\}$. То, что расслоение ξ ориентируемо, следует из односвязности многообразия $\hat{\mathcal{X}}$; доказательству этого факта (т.е. того, что $\pi_1(\hat{\mathcal{X}}) = 0$) посвящена основная часть настоящей главы. Прежде всего мы показываем, что с точностью до $\mathbb{Z}_2$ группа $\pi_1(\hat{\mathcal{X}})$ совпадает с множеством гомотопических классов $[M, S^3]^1$. Это может быть сделано с помощью теории гомотопий или, более геометрически, с помощью конструкции Понтрягина — Тома, которая отождествляет множество $[M, S^3]$ с классами оснащено кобордантных оснащенных подмногообразий из M . Вычисление методом Понтрягина — Тома выполнено в приложении В. Наконец, мы учитываем группу $\mathbb{Z}_2$ и тем самым завершаем доказательство ориентируемости расслоения ξ .

ИНДЕКСНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Индексное расслоение параметризованного семейства операторов Фредгольма, действующих в вещественных гильбертовых пространствах, служит обобщением числового индекса линейного фредгольмова отображения. Пусть $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — линейное фредгольмово отображение гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$; его индексом называется число

$$(5.1) \quad \text{ind } T = \dim \text{Ker } T - \dim \text{Coker } T \in \mathbb{Z}.$$

В параметризованном случае индекс $\text{ind } T$ — это виртуальное расслоение над многообразием параметров X , т.е. элемент группы $KO(X)$. Напомним, что относительно прямой суммы классы эквивалентных вещественных векторных расслоений над X образуют полугруппу, группой Гротендика которой является $KO(X)$. Элемент $\xi \in KO(X)$ может быть представлен в виде формальной разности $\xi = \xi' - \xi''$ двух вещественных расслоений над X . Если X компактно, то виртуальное расслоение ξ стабильно эквивалентно настоящему векторному расслоению. Вещественное векторное расслоение ξ над X ориентируемо тогда и только тогда, когда обращается в нуль его первый класс Штифеля — Уитни $w_1(\xi) \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$. Определим для $\xi = \xi' - \xi'' \in KO(X)$ первый класс Штифеля — Уитни, полагая $w_1(\xi) = w_1(\xi') - w_1(\xi'')$, и назовем ξ ориентируемым в том и только том случае, когда

$w_1(\xi) = 0$. Заметим, что это определение опирается на аддитивность w_1 . Если ξ — настоящее расслоение ($\xi'' = 0$), то указанные понятия ориентируемости совпадают. Кроме того, если $\pi_1(X) = 0$, то любое (виртуальное) расслоение над X ориентируемо. На категории компактных многообразий функтор KO допускает представление, удобное для теории эллиптических операторов. А именно, пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное бесконечномерное вещественное гильбертово пространство. Тогда существует изоморфизм

$$(5.2) \quad \text{ind}: [X, \text{Fred}(\mathcal{H})] \xrightarrow{\sim} KO(X),$$

где $\text{Fred}(\mathcal{H})$ — пространство операторов Фредгольма на $\mathcal{H}$, а $[X, \text{Fred}(\mathcal{H})]$ — группа гомотопических классов отображений $X \rightarrow \text{Fred}(\mathcal{H})$ [А1, приложение]. Пусть $\psi: X \rightarrow \text{Fred}(\mathcal{H})$ — некоторое отображение. Определим виртуальное расслоение $\text{ind } \psi$ над X по аналогии с формулой (5.1), а именно положим

$$(5.3) \quad (\text{ind } \psi)_x = \text{Ker } \psi(x) - \text{Coker } \psi(x).$$

Это определение корректно, если расслоения $\text{Ker } \psi$ и $\text{Coker } \psi$ имеют постоянный ранг для всех точек $x \in X$. Однако в общем случае функции $\dim \text{Ker } \psi(x)$ и $\dim \text{Coker } \psi(x)$ не являются локально постоянными, и поэтому $\text{Ker } \psi(x)$ и $\text{Coker } \psi(x)$ не склеиваются в векторное расслоение. Тем не менее, подобно лемме 4.7 можно показать, что определение (5.3) имеет смысл после малого шевеления ψ (которое не возбраняется, поскольку мы имеем дело с гомотопическим классом отображения ψ). Интуитивно можно представлять себе индексное расслоение как стабильный класс разности ядра и коядра. Для $X = \text{pt}$ мы получаем определение (5.1). К сожалению, не существует прямого обобщения определения (5.3), которое давало бы корректно определенное индексное расслоение для некомпактного многообразия X — бесконечная сумма локальных конечномерных шевелений может оказаться бесконечномерной. С этой трудностью можно справиться, определив $KO(X)$ для некомпактного многообразия X как $KO(X) = [X, \text{Fred}(\mathcal{H})]$ (см. [Р, § 18]). Для нас это определение бесполезно, хотя его идея является основной в нашей конструкции. Можно действовать иначе, принимая во внимание только ограничения на компактные подмногообразия многообразия X . Этого достаточно для наших целей, по-

сколько ориентируемость можно определить, рассматривая только компактные подмножества. Обобщение индексного расслоения на случай, когда гильбертово пространство $\mathcal{H}_x$ зависит от точки $x \in X$, приводится в работе [AS].

Для начала устраним особые точки нашего пространства модулей $\mathcal{M}$, что не может повлиять на ориентируемость. Выше мы отождествили касательное пространство к $\hat{\mathcal{M}}$ в точке $\bar{D}$ с пятимерным линейным подпространством из $\Omega^1(\text{ad } \eta)$

$$E_{\bar{D}} = \{A \in \Omega^1(\text{ad } \eta) : D^*A = 0, P_-DA = 0\},$$

где D — произвольное поднятие $\bar{D}$. Нетрудно видеть, что пространство

$$E_{\mathcal{ZD}} = \{A \in E_{\bar{D}}, D \in \hat{\mathcal{ZD}}\}$$

является пятимерным векторным расслоением над $\hat{\mathcal{ZD}}$. Действие группы $\mathcal{G}$ на многообразии неприводимых автодуальных связностей $\hat{\mathcal{ZD}}$ продолжается до послойного действия на $E_{\mathcal{ZD}}$. Так как касательным пространством к орбите $\bar{D}$ служит пятимерное пространство $E_{\bar{D}}$, то имеет место канонический послойный диффеоморфизм

$$(5.4) \quad T\hat{\mathcal{M}} = E_{\mathcal{ZD}}/\mathcal{G}.$$

Постараемся теперь распространить эту конструкцию на все пространство $\hat{\mathcal{X}}$. Определим оператор $L(D)$, полагая

$$L(D) = D^* \oplus P_-D : \Omega^1(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta) \oplus \Omega_-^2(\text{ad } \eta).$$

Это эллиптический и, следовательно, фредгольмов оператор для каждого $D \in \hat{\mathcal{A}}$. Введем следующие обозначения: $\mathcal{H}_1 = \Omega^1(\text{ad } \eta)$, $\mathcal{H}_2 = \Omega^0(\text{ad } \eta) \oplus \Omega_-^2(\text{ad } \eta)$ (напомним, что $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства; как обычно, мы опустили соболевские индексы). Тогда формула $L(D, \xi) = L(D)\xi$ задает параметризованное семейство эллиптических операторов

$$(5.5) \quad L : \hat{\mathcal{A}} \times \mathcal{H}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{A}} \times \mathcal{H}_2.$$

На пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ естественным образом действует группа $\mathcal{G}$ по правилу

$$\langle z, \varphi \rangle \mapsto z^{-1} \varphi z$$

для $z \in \mathfrak{G}$, $\varphi \in \Omega^i(\text{ad } \eta)$. Семейство L эквивариантно относительно этого действия.

Сформулированные выше алгебраические свойства читатель легко докажет самостоятельно, а краткая проверка аналитических свойств с указанием соболевских индексов содержится в приложении А.

Таким образом, факторизация семейства (5.5) по действию группы $\mathfrak{G}$ доставляет отображение

$$(5.6) \quad \bar{L}: E_1 \rightarrow E_2,$$

где $E_1 = (\hat{\mathcal{A}} \times \mathcal{H}_1)/\mathfrak{G}$ и $E_2 = (\hat{\mathcal{A}} \times \mathcal{H}_2)/\mathfrak{G}$ — гильбертовы расслоения над пространством $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{A}}/\mathfrak{G}$. Отображение $\bar{L}$ наследует от семейства L свойство быть линейным фредгольмовым оператором индекса 5 на каждом слое над $\bar{D} \in \hat{\mathcal{X}}$. Определим виртуальное расслоение ξ , полагая

$$\xi = \text{Ker } \bar{L} - \text{Coker } \bar{L}.$$

Предыдущие рассуждения показывают, что $\xi|_S \in KO(S)$ корректно определено на компактных подмножествах $S \subset \hat{\mathcal{X}}$ — после малого шевеления $\xi|_S$ представляется в виде разности двух вещественных векторных расслоений.

Т е о р е м а 5.7. Если пространство $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{A}}/\mathfrak{G}$ односвязно, то касательное расслоение $T\hat{\mathcal{M}}$ ориентируемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Покажем, что первый класс Штифеля — Уитни $w_1(T\hat{\mathcal{M}})$ расслоения $T\hat{\mathcal{M}}$ обращается в нуль. Предположим противное; тогда существует такая окружность $\Gamma \subseteq \hat{\mathcal{M}}$, что $w_1(T\hat{\mathcal{M}}|_\Gamma) \neq 0$. Пусть S — компактное множество в $\hat{\mathcal{X}}$, содержащее Γ и такое, что $i_*[\Gamma] = 0$, где $i: \Gamma \hookrightarrow S$ — вложение и $[\Gamma]$ — класс гомологий окружности Γ . Например, в качестве S можно взять образ гомотопии, при которой окружность Γ стягивается в точку в односвязном многообразии $\hat{\mathcal{X}}$. Тогда

$$w_1(T\hat{\mathcal{M}}|_\Gamma) = w_1(\xi|_\Gamma) = i^*(w_1(\xi|_S)).$$

Вычислим значение $w_1(T\hat{\mathcal{M}}|_\Gamma)$ на классе гомологий $[\Gamma]$. Имеем

$$\begin{aligned} w_1(T\hat{\mathcal{M}}|_\Gamma)[\Gamma] &= i^*(w_1(\xi|_S))[\Gamma] = \\ &= w_1(\xi|_S)(i_*[\Gamma]) = 0. \end{aligned}$$

Это противоречие показывает, что $w_1(T\hat{\mathcal{M}}) = 0$.

КОМПОНЕНТЫ ГРУППЫ $\mathfrak{G}$

Напомним читателю, что калибровочная группа $\mathfrak{G}$, действуя на пространстве неприводимых связностей $\hat{\mathcal{A}}$, имеет неэффективную подгруппу $\mathbb{Z}_2$, которую можно представлять себе как центр $\{1, -1\}$ группы $SU(2)$. Эти центральные элементы отождествляются с элементами $\mathfrak{G}$ по той причине, что они инвариантны относительно присоединенного действия группы $SU(2)$, использованного для построения $\mathfrak{G} = C^\infty(\text{Aut } \eta)$.

Положим $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathbb{Z}_2$. Тогда $\tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ есть главное расслоение со слоем $\tilde{\mathfrak{G}}$. Действие $\tilde{\mathfrak{G}}$ на $\hat{\mathcal{A}}$ в точке D_0 задается, как обычно, правилом

$$\langle z, A \rangle \mapsto z^{-1} D_0 z + z^{-1} A z.$$

(Некоторые авторы используют формулу $\langle z, A \rangle \mapsto z D_0 z^{-1} + z A z^{-1}$. В нашем случае $z \in \mathfrak{G}$ действует на расслоении $\Omega^i(\text{ad } \eta)$ как $\text{ad } z^{-1}$; возможно, более обычным является действие $\text{ad } z$. Мы обращаем внимание на это различие потому, что, несмотря на его незначительность, оно, подобно знаку оператора Лапласа, может быть причиной путаницы.) Точно так же, как в конечномерном случае, расслоение $\tilde{\mathfrak{G}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ порождает точную гомотопическую последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_1(\hat{\mathcal{A}}) \rightarrow \pi_1(\hat{\mathcal{X}}) \rightarrow \pi_0(\tilde{\mathfrak{G}}) \rightarrow \pi_0(\hat{\mathcal{A}}) \rightarrow \pi_0(\hat{\mathcal{X}}).$$

Напомним, что точные последовательности пунктированных множеств (таких, как $\pi_0(\hat{\mathcal{A}})$) корректно определены. Поскольку прост-

пространство $\mathcal{A}$ стягиваемо, а пространство $\mathcal{A} \setminus \hat{\mathcal{A}}$ приводимых связностей имеет бесконечную коразмерность в $\mathcal{A}$ (существует зависящее от бесконечного числа параметров семейство локальных возмущений, превращающих приводимую связность в неприводимую), то $\hat{\mathcal{A}}$ имеет слабый гомотопический тип точки [5, теорема 2]. Следовательно,

$$(5.8) \quad \pi_1(\hat{\mathcal{X}}) = \pi_0(\mathfrak{G}).$$

Вычислим сначала $\pi_0(\mathfrak{G})$. Из классификационной теоремы, утверждающей, что $SU(2)$ -расслоения полностью характеризуются вторым классом Чжэня, без труда вытекает, что все такие расслоения могут быть построены из двух кусков. (Мы воспользуемся этим в гл. 6 при изучении процедуры прививки.) Другими словами, найдутся такое открытое покрытие $M^4 = M^+ \cup M^-$ с $M^+ \simeq B^4$ (четырёхмерный шар), $M^+ \cap M^- \simeq S^3 \times (0, 1)$ и такая функция перехода $h: M^+ \cap M^- \rightarrow SU(2)$, что главное $SU(2)$ -расслоение P , ассоциированное с η , будет иметь вид

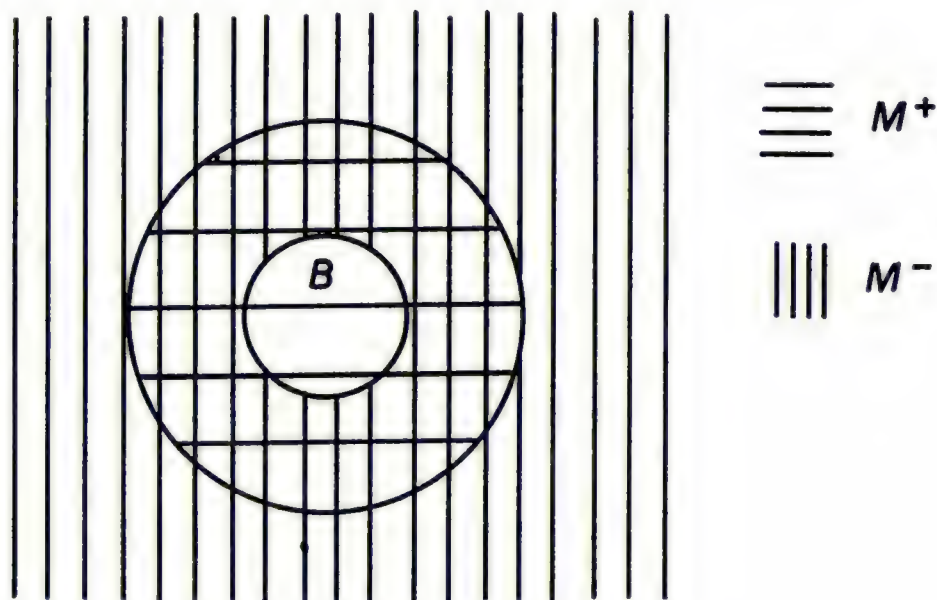
$$P = M^+ \times SU(2) \sqcup M^- \times SU(2) / \sim,$$

где

$$(5.9) \quad \langle m^+, g \rangle \sim \langle m^-, g' \rangle \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$m^+ = m^- \text{ и } g' = h(m^+)g.$$

Так как $c_2(\eta)[M] = -1$, то для любого $t \in (0, 1)$ отображение $x \mapsto h(x, t)$ имеет степень -1 . Поэтому, изменяя его, если понадобится, с помощью гомотопии, можно считать, что $h(x, t) = x^{-1}$. Пусть $B \subseteq M^+$ — шар, целиком лежащий в M^+ ; для простоты можно считать, что $B = M^+ \setminus M^-$:



Положим

$$\mathfrak{G}_0 = \{z \in \mathfrak{G} : z|_B \equiv 1\}.$$

Л е м м а 5.10. Включение $\iota: \mathfrak{G}_0 \hookrightarrow \mathfrak{G}$ индуцирует изомор-
физм

$$\iota_*: \pi_0(\mathfrak{G}_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Ограничение на B калибровочного преобразования есть отображение $B \rightarrow SU(2)$. Поскольку группа $SU(2)$ связна, каждое такое отображение гомотопно постоянному отображению $B \rightarrow \{1\}$. Следовательно, ι_* сюръективно. Предположим теперь, что элемент $z \in \mathfrak{G}_0$ находится в связной компоненте единицы в $\mathfrak{G}$. Тогда в $\mathfrak{G}$ существует путь, соединяющий z с 1 . После ограничения на B этот путь превращается в петлю, отмеченной точкой которой служит постоянное отображение $B \rightarrow \{1\}$. Но группа $SU(2)$ односвязна, поэтому мы имеем гомотопию к постоянной петле над B , т.е. путь в $\mathfrak{G}_0$ из z в 1 . Следовательно, отображение ι_* инъективно.

В силу (5.9) элемент $z \in \mathfrak{G}_0$ может быть описан парой отображений

$$(5.11) \quad \begin{aligned} z^-: M^- &\rightarrow SU(2), \\ z^+: M^+ &\rightarrow SU(2), \end{aligned}$$

удовлетворяющих на пересечении $M^- \cap M^+ = S^3 \times (0, 1)$ условию

$$z^-(x, t) = x^{-1} z^+(x, t) x.$$

Однако $z \equiv 1$ на $M \setminus M^- = B$, поэтому $z^-(x, 0) = z^+(x, 0) = 1$. Значит,

$$z^- \in [(M^-, \partial M^-), (SU(2), 1)] = [(M, pt), (S^3, pt)] = [M, S^3],$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что сфера S^3 односвязна.

Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 5.12.

$$\pi_0(\mathfrak{G}) = \pi_0(\mathfrak{G}_0) = [M, S^3].$$

Наметим в общих чертах то, что нам нужно знать о группе $[M, S^3]$. Более подробные геометрические доказательства можно найти в приложении В. Произвольное отображение $\mathfrak{b}: M \rightarrow S^4$ степени 1 индуцирует гомоморфизм $\mathfrak{b}^*: [S^4, S^3] \rightarrow [M, S^3]$.

Предложение 5.13. Если форма пересечений ω многообразия M^4 нечетна, то $[M^4, S^3] = 0$, если же она четна, то $[M^4, S^3] = \mathbb{Z}_2$. Более того, в случае четной формы ω группа $\mathbb{Z}_2$ является образом группы $[S^4, S^3] = \mathbb{Z}_2$ при гомоморфизме $\mathfrak{b}^*$.

Доказательство. По классификационной теореме Стинрода $[Sp]$

$$[M, S^3] = H^4(M; \mathbb{Z}_2) / \text{Im } \widetilde{Sq}^2.$$

Гомоморфизм $\widetilde{Sq}^2: H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ есть композиция обычного квадрата Стинрода и приведения по модулю 2, т.е. $\widetilde{Sq}^2(\alpha) = \omega(\alpha, \alpha) \bmod 2$, где ω — билинейная форма в гомологиях средней размерности. Это дает требуемый результат. Кроме того, поскольку конструкция функториальна, то $[M^4, S^3] \subseteq \mathfrak{b}^*\{[S^4, S^3]\}$, откуда в случае четной формы ω следует изоморфизм $[M^4, S^3] \cong \mathfrak{b}^*\{[S^4, S^3]\}$.

Следствие 5.14.

$$\pi_0(\mathfrak{G}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{если форма } \omega \text{ четна,} \\ 0, & \text{если форма } \omega \text{ нечетна.} \end{cases}$$

Опишем вкратце образующую группы $[S^4, S^3]$, которая представляет собой надстройку отображения Хопфа. Пусть $S^1 = \{e^{i\Lambda\theta}, \Lambda \in \mathfrak{su}(2)\}$. Отображение Хопфа $H: S^3 = SU(2) \rightarrow S^2 = SU(2)/S^1$ — это в точности отображение в левые классы смежности:

$$H(x) = [x] = \{xe^{i\Lambda\theta}\}.$$

Его надстройка $\Sigma H: \Sigma S^3 = S^4 \rightarrow \Sigma S^2 = S^3$ есть просто отображение

$$(5.15) \quad \Sigma H(x, \varphi) = \langle [x], \varphi \rangle,$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$ — полярный угол в сферах S^4 и S^3 .

ЭЛЕМЕНТ -1

Из расслоения

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j} \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$$

мы получаем точную последовательность пунктированных множеств

$$(5.16) \quad \dots \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \pi_0(\mathfrak{G}) \rightarrow \pi_0(\tilde{\mathfrak{G}}) \rightarrow 0.$$

Если форма ω нечетна, то, комбинируя изоморфизм (5.8) со следствием 5.14, находим, что $\pi_1(\hat{\mathcal{K}}) = 0$. Обратимся теперь к случаю четной формы пересечений ω . Последовательность (5.16) превращается тогда в

$$(5.17) \quad \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_0(\tilde{\mathfrak{G}}) \rightarrow 0,$$

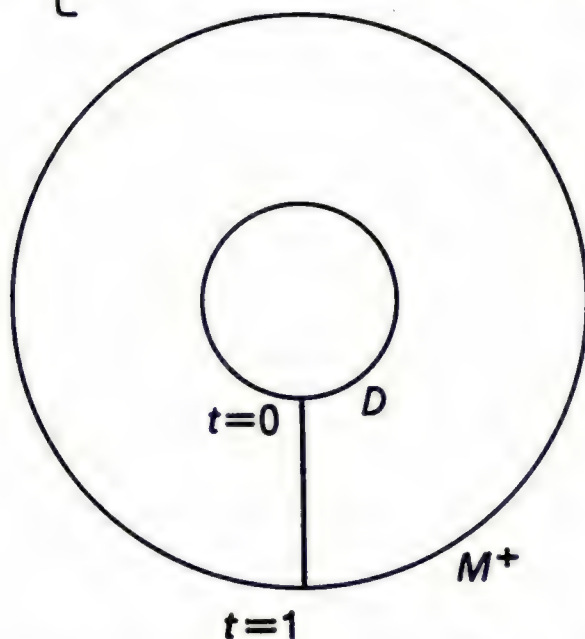
и $\pi_0(\tilde{\mathfrak{G}}) = 0$ тогда и только тогда, когда j_* отображает $-1 \in \mathbb{Z}_2 \subseteq \mathfrak{G}$ в нетривиальный элемент группы $\pi_0(\mathfrak{G})$. Поэтому все, что остается — исследовать отображение j_* . Наш анализ основан на явной конструкции, которая использовалась при доказательстве предложения 5.12.

Предложение 5.18. Отображение j_* сюръективно.

Доказательство. Как и прежде, фиксируем в $SU(2)$ подгруппу $S^1 = \{e^{i\Lambda\theta}\} \subseteq SU(2)$. Пусть $\lambda(t) = e^{i\pi t\Lambda}$, $0 \leq t \leq 1$, — путь, соединяющий $+1$ и -1 в S^1 . Используя λ , переведем элемент $-1 \in \mathfrak{G}$ в подгруппу $\mathfrak{G}_0$. В результате мы получим элемент $z \in \mathfrak{G}_0$, задаваемый отображениями (см. (5.11))

$$s^+ = \begin{cases} \lambda(t) & \text{на } M^+ \cap M^-, \\ +1 & \text{на } D, \end{cases}$$

$$s^- = \begin{cases} x^{-1}\lambda(t)x & \text{на } M^+ \cap M^-, \\ -1 & \text{на } M^- \setminus M^+. \end{cases}$$



Тогда элемент s лежит в подгруппе $\mathfrak{G}_0$ в силу (5.11) и находится в той же связной компоненте $\mathfrak{G}$, что и -1 .

При отождествлении $\pi_0(\mathfrak{G})$ с $[M^4, S^3]$ в предложении 5.12 элемент s представлялся отображением s^- , продолженным единицей на шар B . Кроме того, определив отображение $\mathfrak{b}: M^4 \rightarrow S^4$ правилом

$$\mathfrak{b}(M^+ \setminus M^-) = \text{северный полюс } (\varphi = 0),$$

$$\mathfrak{b}(M^- \setminus M^+) = \text{южный полюс } (\varphi = \pi),$$

$$\mathfrak{b}|_{M^+ \cap M^-}: S^3 \times (0, 1) \rightarrow \Sigma S^3 \quad (\text{естественная проекция}),$$

мы видим, что $s^- = u \circ \mathfrak{b}$, где $u: S^4 \rightarrow S^3$ задается формулой

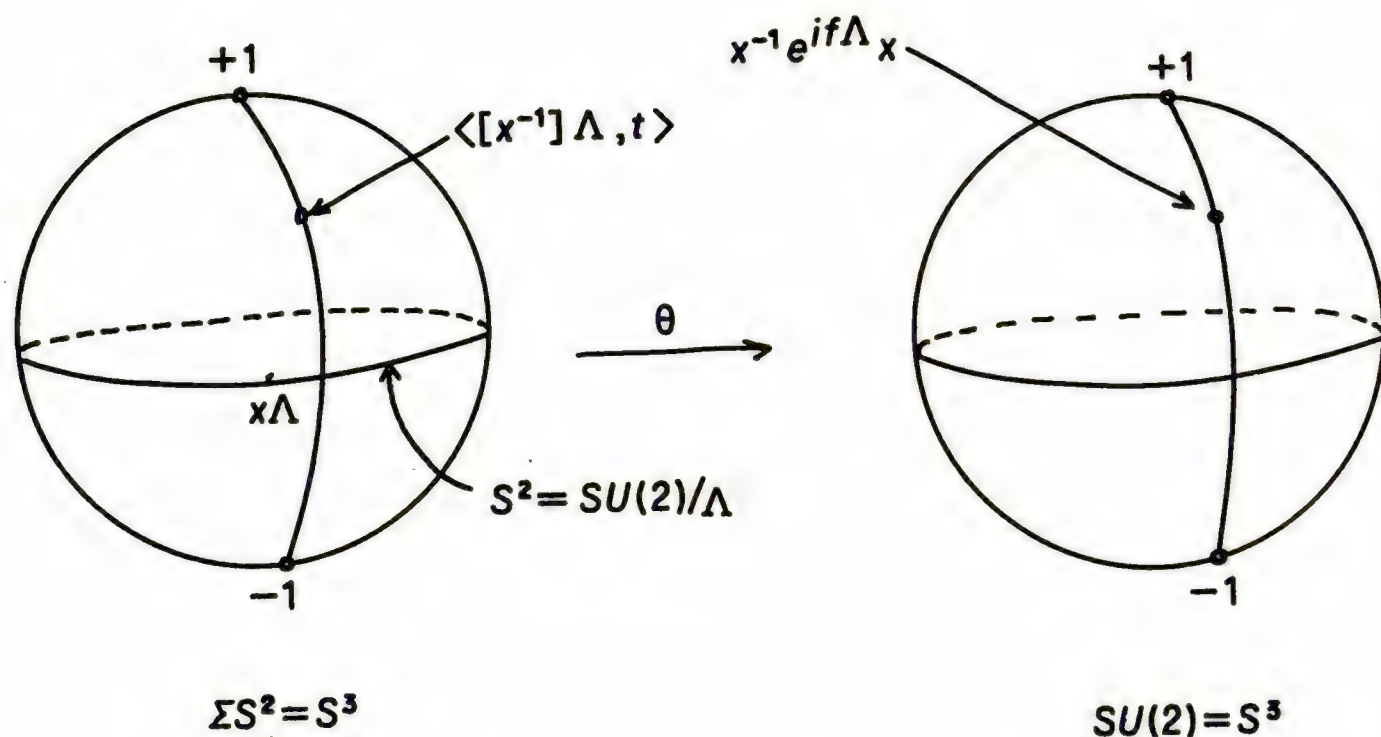
$$u(x, \varphi) = x^{-1} e^{i\varphi \Lambda} x.$$

Тогда u пропускается через надстройку $\overline{\Sigma H}$ отображения, обратного к отображению Хопфа:

$$\begin{array}{ccc} S^4 & \xrightarrow{u} & S^3 \\ \searrow \overline{\Sigma H} & & \nearrow \theta \\ \Sigma S^2 = S^3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle x, \varphi \rangle & \longrightarrow & x^{-1} e^{i\varphi \Lambda} \\ \searrow & & \nearrow \\ \langle [x^{-1}], \varphi \rangle & & \end{array}$$

Здесь θ — диффеоморфизм, отождествляющий большую полуокружность, проходящую через точку $[x^{-1}] \in SU(2)/U(1) = S^2$ на экваторе, с большой полуокружностью $\{x^{-1}e^{i\varphi\Lambda}x: 0 \leq \varphi \leq \pi\}$:



Из предложения 5.13 и обсуждения, следующего за 5.14, вытекает, что z^- порождает нетривиальный элемент в группе $\mathbb{Z}_2 = \pi_0(\mathfrak{G})$. Поэтому отображение j_* сюръективно и $\pi_0(\tilde{\mathfrak{G}}) = 0$. Отсюда в силу изоморфизма (5.8) следует, что $\pi_1(\hat{\mathcal{X}}) = 0$.

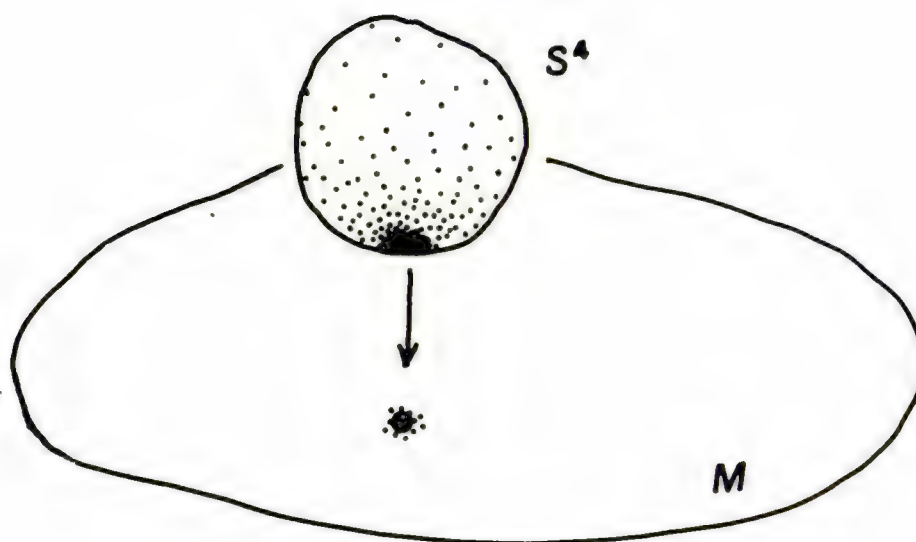
Итак, мы полностью доказали основной результат этой главы:

Т е о р е м а 5.19. Многообразие $\hat{\mathcal{M}}$ ориентируемо.

Глава 6

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ ТАУБСА

В предыдущих главах мы показали, что пространство модулей $\hat{\mathcal{M}}$ является гладким ориентируемым многообразием. Однако если не существует приводимых связностей, оно может оказаться пустым! Теорема Клиффорда Таубса [Т] исключает эту мрачную возможность. Она утверждает, что автодуальные связности существуют на любом четырехмерном многообразии M с положительно определенной формой пересечений. Теорема Таубса дополняет работу Атьи, Хитчина и Зингера [АHS], которые построили пространства модулей для более ограниченного класса полуконформно плоских многообразий. Применяя к этим многообразиям теорию твисторов, можно превратить задачу отыскания автодуальных связностей в задачу алгебраической геометрии. В частности, таким путем получаются все решения автодуальных уравнений Янга – Миллса на сфере S^4 со стандартной метрикой, хотя топологическое строение соответствующего пространства модулей для $k > 2$ известно не полностью. Наше четырехмерное многообразие M в общем случае не является полуконформно плоским, поэтому для него требуются иные методы. Используя аналитическую технику, Таубс конструирует автодуальные связности на M , исходя из решений на S^4 . Инстантоны на сфере S^4 с топологическим зарядом $k = 1$ имеют центр $b \in S^4$ и масштаб $\lambda \in \mathbb{R}^+$. В случае, когда λ стремится к нулю, инстантон локализуется вблизи точки b , и можно представить себе предельную связность с $\lambda = 0$, кривизна которой сосредоточена в одной точке b . С помощью так называемой процедуры прививки Таубс переносит эти локализованные автодуальные связности на многообразие M , где они приобретают некоторую антиавтодуальную кривизну; после малого возмущения (которое можно выполнить при небольших λ) они превращаются в автодуальные связности:



Это дает семейство инстантонов на M , параметризованных многообразием $(0, \lambda_0) \times M$. В предпоследней (девятой) главе будет показано, что это семейство образует воротник многообразия M в $\overline{\mathcal{M}}$; поэтому, присоединяя предельные связности, соответствующие масштабу $\lambda = 0$, мы получаем компактификацию $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup M$ пространства модулей.

Мы начнем эту главу с описания инстантонов на сфере S^4 с топологическим зарядом $k = 1$. Затем опишем процедуру прививки и выведем оценки кривизны, показывающие, что «привитые» связности почти автодуальны. Остальная часть данной главы отдана формулировкам различных аналитических результатов (иногда стандартных, иногда специальных), которые понадобятся в гл. 7 – 9. В следующей главе мы завершим доказательство теоремы Таубса, аннулируя антиавтодуальную часть кривизны с помощью малых возмущений.

При описании инстантонов на S^4 , а также при выводе формул Вейтценбёка, которому посвящено приложение С, основную роль играют группы симметрий и связанные с ними главные расслоения. Поэтому мы без колебаний используем их в первом разделе настоящей главы. Однако, памятуя данное ранее обещание избегать главных расслоений и учитывая, что их геометрия мало знакома аналитикам, укажем, что в дальнейшем из всего первого раздела существенное значение будут иметь лишь формулы (6.7) и (6.8). Другой вывод этих формул можно найти в физической литературе [BPST], [JNR]. Каким бы путем ни были получены формулы для инстантонов на сфере, описание их пространства модулей имеет решающее значение для понимания общей ситуации. Отметим, что формулы Вейтценбёка можно получить иначе – прямыми вычислениями в нормальных

координатах. И, наконец, мы надеемся, что включение в главу некоторых стандартных результатов, относящихся к уравнениям в частных производных, поможет читателям, не имеющим достаточного опыта в этой области.

ИНСТАНТОНЫ НА S^4

Более подробная информация о решениях уравнений Янга – Миллса на четырехмерной сфере S^4 может быть найдена в монографии Атьи [A2], которой мы близко придерживаемся в нашем изложении. В частности, мы используем для элементов из $\mathbb{R}^4$ кватернионное обозначение

$$x = x^1 + x^2 i + x^3 j + x^4 k \in \mathbb{H}.$$

Разумеется, здесь $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ и элементы i, j, k антикоммутируют. Напомним, что

$$\operatorname{Re} x = x^1,$$

$$\operatorname{Im} x = x^2 i + x^3 j + x^4 k,$$

$$\bar{x} = x^1 - x^2 i - x^3 j - x^4 k$$

и $|x|^2 = x\bar{x}$ – обычная норма в $\mathbb{R}^4$. Алгебра Ли $\operatorname{Im} \mathbb{H}$ мнимых кватернионов изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$, а группа Ли $\operatorname{Sp}(1)$ единичных кватернионов изоморфна группе Ли $SU(2)$. Дифференциалы в кватернионных обозначениях вычисляются обычным образом, однако рекомендуется проявлять особую аккуратность в связи с некоммутативностью кватернионов. Кватернионные обозначения удивительно хороши для выражения автодуальности: коэффициенты при i, j и k в произведении

$$(6.1) \quad dx \wedge d\bar{x} = -2\{(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4)i + \\ + (dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4)j + (dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3)k\}$$

образуют базис для автодуальных 2-форм, а коэффициенты в произведении

$$d\bar{x} \wedge dx = 2\{(dx^1 \wedge dx^2 - dx^3 \wedge dx^4)i + \\ + (dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4)j + (dx^1 \wedge dx^4 - dx^2 \wedge dx^3)k\}$$

образуют базис для антиавтодуальных 2-форм. Обе формы принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$, а так как при отождествлении $\mathfrak{su}(2) \simeq \operatorname{Im} \mathbb{H}$ скалярное произведение (2.12) на $\mathfrak{su}(2)$ превращается в скалярное произведение $(x, y) = 2\operatorname{Re}(x\bar{y})$ на $\operatorname{Im} \mathbb{H}$, то их нормы имеют вид

$$(6.2) \quad \|dx \wedge d\bar{x}\|^2 \operatorname{vol} = 2\operatorname{Re}\{(dx \wedge d\bar{x}) \wedge *(\overline{dx \wedge d\bar{x}})\} = \\ = 48 \operatorname{vol} = \|d\bar{x} \wedge dx\|^2 \operatorname{vol}.$$

Снабдим $\mathbb{H}^2$ стандартным кватернионным скалярным произведением

$$(\langle p^1, p^2 \rangle, \langle q^1, q^2 \rangle) = p^1 \bar{q}^1 + p^2 \bar{q}^2.$$

Тогда $\operatorname{Re}(,)$ есть не что иное, как стандартное вещественное скалярное произведение на $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{H}^2$. Векторы из $\mathbb{R}^8$, имеющие вещественную норму 1, образуют семимерную сферу S^7 , которая расслаивается над $S^4 \simeq \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ при помощи отображения

$$\pi: \langle q^1, q^2 \rangle \mapsto [q^1, q^2], \quad |q^1|^2 + |q^2|^2 = 1.$$

Здесь $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 = \{[q^1, q^2]\}$ — проективизация $\mathbb{H}^2$, т.е. $[q^1, q^2] = [pq^1, pq^2]$ в $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$ для любого ненулевого кватерниона $p \in \mathbb{H}$. Слой расслоения $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ служит группа $SU(2) = \{p \in \mathbb{H}: |p| = 1\}$, которая действует на S^7 умножением слева на сопряженную матрицу. Таким образом, $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ — это главное $SU(2)$ -расслоение с топологическим зарядом $k = 1$ (последнее утверждение нетрудно проверить, вычисляя класс Чжэня этого расслоения с помощью формул (2.9) и (6.6)). В дальнейшем нам понадобится двумерное комплексное векторное расслоение, ассоциированное с $\pi: S^7 \rightarrow S^4$; мы будем обозначать его символом η_{S^4} .

Поскольку группа $Sp(2)$ действует изометриями на S^7 , вещественное ортогональное дополнение к вертикальному касательному пространству

$$VTS_{\langle q^1, q^2 \rangle}^7 = \{ \langle pq^1, pq^2 \rangle : p \in \text{Im } \mathbb{H} \}$$

определяет однородное горизонтальное распределение на S^7 . Легко проверить, что это связность в главном расслоении $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ и что

$$(6.3) \quad \odot = \text{Im}(q^1 d\bar{q}^1 + q^2 d\bar{q}^2)$$

представляет собой соответствующую форму связности. Формула для кривизны Ω довольно сложна, однако в точке $\langle q^1, q^2 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ она имеет простой вид

$$(6.4) \quad \Omega_{\langle 0, 1 \rangle} = dq^1 \wedge d\bar{q}^1.$$

Горизонтальное подпространство в точке $\langle 0, 1 \rangle$ порождено над $\mathbb{H}$ вектором $\partial/\partial q^1$ и поэтому, в силу соотношения (6.1), $\Omega_{\langle 0, 1 \rangle}$ является прообразом автодуальной формы на $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$. Учитывая $Sp(2)$ -однородность, мы получаем отсюда, что форма кривизны Ω всюду автодуальна. Кроме того, это сохраняющее связность действие группы $Sp(2)$ на S^7 проектируется на обычное действие группы $SO(5)$ на S^4 . Конформная инвариантность автодуального уравнения Янга – Миллса показывает, что на η_{S^4} действует двулистная накрывающая $SL(2, \mathbb{H})$ более обширной, чем $SO(5)$, группы $SO(5, 1) \simeq SL(2, \mathbb{H})/\{\pm 1\}$ конформных преобразований; это дает новые инстанты. Существенно более трудным является тот факт, что все инстанты с топологическим зарядом $k = 1$ могут быть получены таким образом [ANS]. Благодаря этому мы видим, что пространством модулей для S^4 служит гиперболический шар $B^5 = SL(2, \mathbb{H})/Sp(2) = SO(5, 1)/SO(5)$.

Используя стереографическую проекцию

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^1 \simeq S^4,$$

$$x \mapsto [x, 1]$$

и сечение

$$\mu(x) = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

расслоения $\eta_{S^4}|_{\mathbb{R}^4}$, нетрудно получить локальный вид формул (6.3) и (6.4). Имеем

$$(6.5) \quad A = \mu^* \Theta = \operatorname{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right),$$

$$(6.6) \quad F = \mu^* \Omega = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Более явные выражения получаются, если записать формулы (6.5) и (6.6) в координатах. Пусть

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i dx^i,$$

$$F = \sum_{i < j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Тогда

$$A_1 = \operatorname{Im} \left(\frac{x}{1 + |x|^2} \right) = \frac{x^2 i + x^3 j + x^4 k}{1 + |x|^2},$$

$$A_2 = \operatorname{Im} \left(\frac{-xi}{1 + |x|^2} \right) = \frac{-x^1 i + x^3 k - x^4 j}{1 + |x|^2},$$

$$A_3 = \operatorname{Im} \left(\frac{-xj}{1 + |x|^2} \right) = \frac{-x^1 j - x^2 k + x^4 i}{1 + |x|^2},$$

$$A_4 = \operatorname{Im} \left(\frac{-xk}{1 + |x|^2} \right) = \frac{-x^1 k + x^2 j - x^3 i}{1 + |x|^2}.$$

Множитель 48 в выражении

$$k = 1 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{48 dx}{(1 + |x|^2)^2}$$

объясняется наличием множителя 2 в формуле скалярного произведения, например

$$i \in \mathbb{H} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{и} \quad -\text{tr} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = 2,$$

а также наличием множителя 2 в каждом из шести слагаемых формы кривизны, например

$$F_{12} = \frac{-2i}{(1 + |x|^2)^2},$$

который возводится в квадрат при вычислении норм.

Конформные преобразования вида

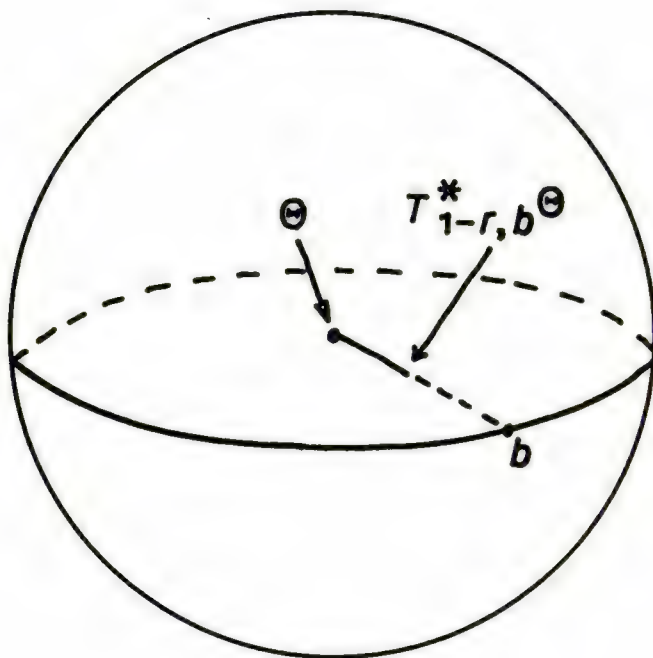
$$T_{\lambda, \ell}: x \mapsto \lambda(x - \ell), \quad \lambda > 0, \quad \ell \in S^4,$$

параметризуют пространство модулей $SO(5, 1)/SO(5)$, если отождествить $T_{\lambda, \ell}$ с $T_{1/\lambda, \ell^*}$, где ℓ^* — точка на сфере S^4 , антиподальная к ℓ . Действуя на форму Θ , преобразования $T_{\lambda, \ell}$ порождают инстантоны $T_{\lambda, \ell}^* \Theta$. Говорят, что инстантон $T_{\lambda, \ell}^* \Theta$ имеет центр ℓ и масштаб λ . (Наш основной инстантон Θ не имеет центра, а его масштаб λ равен единице.) Эту терминологию можно объяснить следующим образом. Гомотетия $T_\lambda = T_{\lambda, 0}$ задается на $\mathbb{R}^4$ формулой $x \mapsto \lambda x$; она действует на формы связности и кривизны по правилу

$$(6.7) \quad \mu^* T_\lambda^* \Theta = \text{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{\lambda^2 + |x|^2} \right),$$

$$(6.8) \quad \mu^* T_\lambda^* \Omega = \frac{\lambda^2 dx \wedge d\bar{x}}{(\lambda^2 + |x|^2)^2}.$$

Заметим, что в случае, когда в выражении (6.8) масштаб λ стремится к нулю, кривизна оказывается сконцентрированной в точке $x = 0$. Более общим образом, кривизна связности $T_{\lambda, \ell}^* \Theta$ центрирована в точке ℓ ; ее протяженность определяется масштабом λ . Отсюда получается наглядное описание пространства модулей B^5 :



Центр шара — это основной инстантон $\oplus$; точка на радиусе, проведенном в точку $b \in S^4 = \partial B^5$ на расстоянии r от центра — это инстантон $T_{1-r,b}^* \oplus$. По мере приближения к граничной точке b кривизна все более концентрируется в этой точке. Поэтому естественно компактифицировать пространство модулей B^5 , приклеивая к нему край S^4 . На интуитивном уровне точки из S^4 представляют автодуальные связности с дельтаобразной кривизной, т.е. с кривизной, сосредоточенной в одной точке. Таким образом, краем компактифицированного пространства модулей оказывается исходное многообразие S^4 , обладающее в этом пространстве воротником

$$[0, \lambda_0) \times S^4 = \{T_{\lambda,b}^* \oplus : \lambda < \lambda_0\} \cup S^4, \quad \lambda_0 < 1.$$

ПРОЦЕДУРА ПРИВИВКИ

Данное в предыдущем разделе описание пространства модулей вблизи края обобщается на любое четырехмерное многообразие M , удовлетворяющее условиям теоремы 2.25. Чтобы получить такое описание, необходимо построить на M связности специального вида. Мы сделаем это, отправляясь от инстантонов на S^4 , с помощью процедуры, которая называется процедурой прививки. Теорема 6.12 показывает, что полученные таким образом связности приближенно автодуальны. В гл. 7 мы малым шевелением уничтожим антиавтоду-

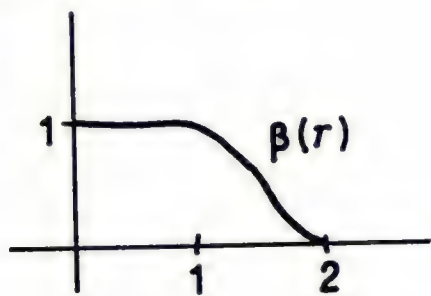
альную часть кривизны этих связностей, а в гл. 9 получим структуру произведения на конце многообразия M .

Любое $SU(2)$ -расслоение η над многообразием M получается как прообраз $SU(2)$ -расслоения над S^4 относительно некоторого отображения $\Phi: M \rightarrow S^4$. Если Φ имеет степень 1, то $\eta = \Phi^*(\eta_{S^4})$ - расслоение над M с топологическим зарядом $k = 1$. Пусть $\rho(M)$ - радиус инъективности M , т.е. радиус наименьшей нормальной координатной системы на M . Для произвольной точки $y \in M$ и положительного числа $\lambda \in (0, \frac{\rho(M)^2}{4})$ построим отображение степени 1

$$\Phi_{\lambda, y}: M \rightarrow S^4,$$

поступая следующим образом. Пусть U - окрестность точки y , которая с помощью $\exp^{-1}$ диффеоморфно отображается на открытое множество в $\mathbb{R}^4$. Фиксируем гладкую срезающую функцию $\beta: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющую условиям

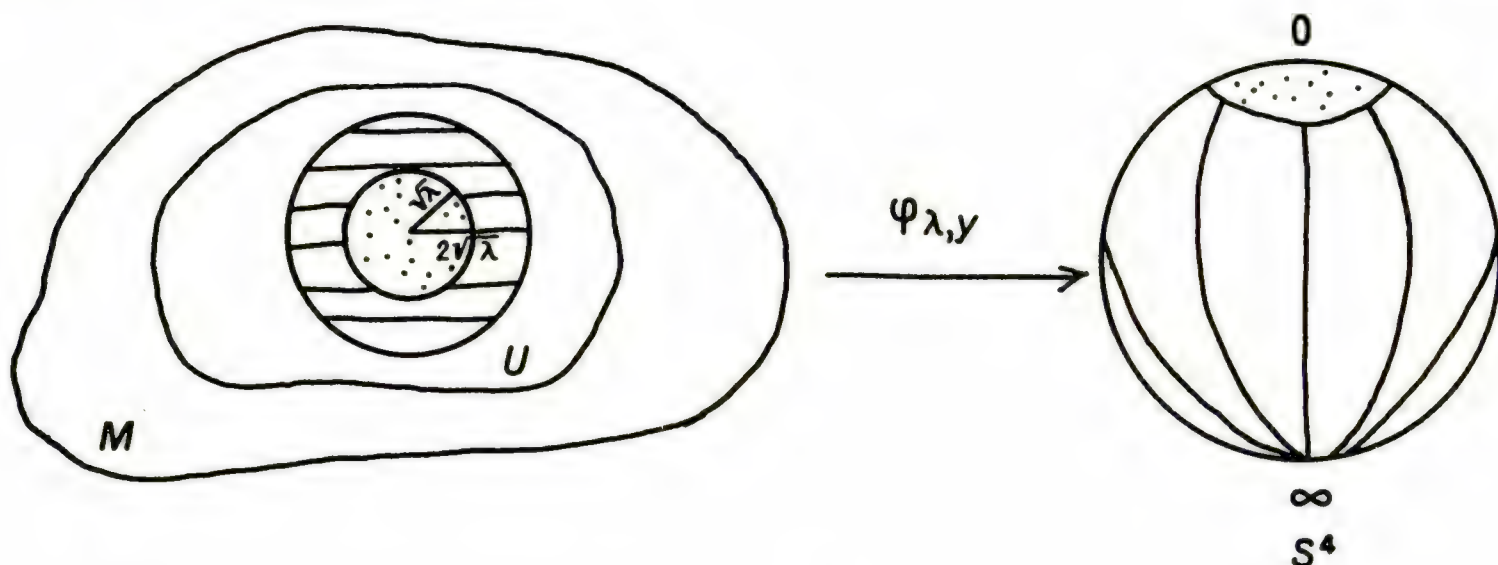
$$(6.9) \quad \begin{cases} \beta(r) = 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ \beta(r) = 0, & r \geq 2, \\ \beta \text{ монотонно убывает,} \\ |\beta'(r)| \leq 2. \end{cases}$$



Определим отображение $\varphi_{\lambda, y}: M^4 \rightarrow S^4$, полагая

$$(6.10) \quad \varphi_{\lambda, y}(x) = \begin{cases} \frac{\exp^{-1} x}{\beta\left(\frac{|\exp^{-1} x|}{\sqrt{\lambda}}\right)}, & x \in U, \\ \infty, & x \notin U. \end{cases}$$

(Коэффициент $\sqrt{\lambda}$ выбран с большим запасом.) В этой формуле мы отождествляем $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ со сферой S^4 посредством стереографической проекции. Шар $\exp(B_{\sqrt{\lambda}}) \subseteq M$ отображается с помощью $\varphi_{\lambda, \psi}$ на шар $B_{\sqrt{\lambda}} \subseteq \mathbb{R}^4$, в то время как кольцо $\exp(B_{2\sqrt{\lambda}} \setminus B_{\sqrt{\lambda}}) \subseteq M$ растягивается на внешность шара $B_{\sqrt{\lambda}} \subseteq \mathbb{R}^4$ вплоть до бесконечности.



Определим теперь отображение $\Phi_{\lambda, \psi}$ как композицию

$$M \xrightarrow{\varphi_{\lambda, \psi}} S^4 \xrightarrow{T_\lambda} S^4,$$

где T_λ — растяжение с масштабным множителем λ . Тогда $\eta = \Phi_{\lambda, \psi}^*(\eta_{S^4})$ — расслоение над M с топологическим зарядом $k=1$. Ясно, что расслоение η наследует связность $D_\lambda = \Phi_{\lambda, \psi}^*(\odot)$ с кривизной $F_\lambda = \Phi_{\lambda, \psi}^*(\Omega)$. На $M \setminus U$ форма кривизны F_λ тождественно равна нулю, а на окрестности U она задается в нормальных координатах формулой

$$(6.11) \quad F_\lambda(x) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\left(\lambda^2 + \frac{|x|^2}{\beta\left(\frac{|x|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} \right)^2} d\left(\frac{x}{\beta\left(\frac{|x|}{\sqrt{\lambda}}\right)} \right) \wedge d\left(\frac{\bar{x}}{\beta\left(\frac{|x|}{\sqrt{\lambda}}\right)} \right)$$

(см. формулы (6.8), (6.10)). Покажем теперь, что форма F_λ почти автодуальна. Строгий смысл этого утверждения заключается в следующих оценках.

Т е о р е м а 6.12. Для каждого числа p , удовлетворяющего неравенствам $1 < p \leq \infty$, существуют такие не зависящие от λ константы $c_1(p)$, $c_2(p)$, что

$$(i) \quad \|F_\lambda\|_{L^p} \leq c_1(p) \lambda^{4/p-2},$$

$$(ii) \quad \|P_- F_\lambda\|_{L^p} \leq c_2(p) \lambda^{2/p}.$$

Как и прежде, P_- — это проекция на антиавтодуальные 2-формы. Норма $\|\cdot\|_{L^p}$ задается формулой

$$\|F\|_{L^p} = \left(\int_M |F|^p \right)^{1/p}.$$

Начиная с этого места, мы будем для краткости опускать в интегралах форму объема (если это не приведет к путанице) и, кроме того, обозначать константы просто через c_1 , c_2 и т.д. Отметим, что теорема 6.12 выполняется без каких бы то ни было предположений о глобальном строении многообразия M .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть g_x — метрика на многообразии M , выраженная в нормальных координатах x . Обозначим через δ стандартную метрику на $\mathbb{H}$, определяемую нормой $|x|$. Из элементарных свойств экспоненциального отображения вытекает, что $g_0 = \delta$, $\frac{dg_x}{dx}\bigg|_{x=0} = 0$. Следовательно, по формуле Тейлора

$$(6.13) \quad |g_x - \delta| \leq c_3 |x|^2,$$

где c_3 — константа, зависящая от кривизны M в окрестности y . Ограничимся значениями $\lambda < 1/8c_3$, так что $\|g_x - \delta\| \leq 1/2$ в шаре $B_{2\sqrt{\lambda}}$. Тогда поточечная проекция на антиавтодуальную часть 2-формы, рассматриваемая как отображение $\{\text{метрики на } \mathbb{R}^4\} \rightarrow \text{End}(\Lambda^2 \mathbb{R}^4)$, непрерывна. Из неравенства (6.13) следует, что

$$(6.14) \quad |P_- F_\lambda(x) - F_\lambda^-(x)| \leq c_4 |x|^2,$$

где F_λ^- — антиавтодуальная часть формы F_λ относительно метрики δ .

Рассмотрим вначале шар $B_{\sqrt{\lambda}}$. Здесь форма

$$F_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^2 dx \wedge d\bar{x}}{(\lambda^2 + |x|^2)^2}$$

автодуальна относительно δ . Оценка (6.14) вместе с равенством (6.2) дает

$$|P_- F_{\lambda}(x)| \leq c_5 \frac{\lambda^2 |x|^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^2} \leq \frac{1}{4} c_5,$$

так что

$$(6.15) \quad \left(\int_{B_{\sqrt{\lambda}}} |P_- F_{\lambda}(x)|^p \right)^{1/p} \leq c_6 \lambda^{2/p}.$$

Далее,

$$|F_{\lambda}(x)| \leq c_7 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + |x|^2)^2},$$

и неравенство

$$\int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^{2p} r^3 dr}{(\lambda^2 + r^2)^{2p}} \leq \lambda^{4-2p} \int_0^{\infty} \frac{s^3 ds}{(1+s^2)^{2p}}$$

показывает, что

$$(6.16) \quad \left(\int_{B_{\sqrt{\lambda}}} |F_{\lambda}(x)|^p \right)^{1/p} \leq c_8 \lambda^{4/p-2}.$$

Рассмотрим теперь кольцо $B_{2\sqrt{\lambda}} \setminus B_{\sqrt{\lambda}}$. Выполняя дифференцирование в формуле (6.11), получаем, что

$$F_{\lambda}(x) = \frac{\beta \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right)^4 \lambda^2}{\left(\beta \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \lambda^2 + r^2 \right)^2} \left\{ \frac{dx \wedge d\bar{x}}{\beta \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right)^2} + \right.$$

$$+ \frac{\beta' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right)}{2\beta \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right)^3 r \sqrt{\lambda}} \left[(dx) \bar{x} \wedge (dx) \bar{x} - x d\bar{x} \wedge x d\bar{x} \right] \Bigg\},$$

где $r = |x|$. Поскольку $|(dx) \bar{x} \wedge (dx) \bar{x} - x d\bar{x} \wedge x d\bar{x}| = O(r^2)$, нам нужно всего лишь оценить два слагаемых

$$\frac{\beta^2 \lambda^2}{(\beta^2 \lambda^2 + r^2)^2}, \quad \frac{\beta \beta' \lambda^{3/2} r}{(\beta^2 \lambda^2 + r^2)^2}.$$

Используя свойства (6.9) функции β , нетрудно показать, что эти слагаемые ограничены независимо от λ . (Это единственное место, где выбор коэффициента $\sqrt{\lambda}$ в формуле (6.10) имеет решающее значение.) Следовательно,

$$(6.17) \quad \left(\int_{B_{2\sqrt{\lambda}} \setminus B_{\sqrt{\lambda}}} |F_\lambda(x)|^p \right)^{1/p} \leq c_9 \lambda^{2/p},$$

а так как $|P_- F_\lambda(x)| \leq |F_\lambda(x)|$, то неравенство (6.17) выполняется и для формы $P_- F_\lambda$. Собирая вместе оценки (6.15) – (6.17) и учитывая тот факт, что $F_\lambda \equiv 0$ на $M \setminus B_{2\sqrt{\lambda}}$, мы получаем неравенства теоремы 6.12.

НЕОБХОДИМЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

В этом разделе собраны те результаты из анализа, которые понадобятся нам в гл. 7 – 9: формулы Вейтценбёка, основные факты о пространствах Соболева, а также некоторые элементарные свойства эллиптических уравнений в частных производных. По необходимости наше изложение очень краткое, подробности можно отыскать в стандартных руководствах (например, [Au], [F], [GT], [Tr]).

Для того чтобы проанализировать скрученную функцию ψ на многообразии M , т.е. сечение векторного расслоения ξ , часто бывает достаточным изучить ее норму $|\psi|$, используя известные результаты об обычных функциях на M . Основанная на этом принципе поточечная формула

$$(6.18) \quad (\nabla^* \nabla \psi, \psi) = \frac{1}{2} \Delta |\psi|^2 + |\nabla \psi|^2 \geq \frac{1}{2} \Delta |\psi|^2$$

является главным связующим звеном между лапласианом $\nabla^* \nabla$ на скрученных функциях и лапласианом Δ на обычных функциях. (Разумеется, чтобы придать смысл формуле (6.18), мы постулируем метрики на многообразии M и расслоении ξ , а также согласованное с метрикой ковариантное дифференцирование на ξ .) Мы используем положительные лапласианы, задаваемые в ортонормированном репере $\{e_k\}$ касательного пространства, в котором форма связности обращается в нуль в данной точке, формулой

$$(6.19) \quad \nabla^* \nabla f = \Delta f = - \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} f.$$

Отметим здесь, что лапласианы с противоположным знаком встречаются в литературе столь же часто. Мы надеемся, что наш выбор знака не станет причиной недоразумений.

В последующих главах мы будем использовать также аналог формулы (6.18), называемый неравенством Като: на открытом множестве, где $\psi \neq 0$,

$$(6.20) \quad |\nabla \psi| \geq |\alpha| |\psi|$$

(доказательство этого факта получается простым применением неравенства Коши – Шварца). Это дает более тонкий вариант неравенства (6.18):

$$(6.21) \quad (\nabla^* \nabla \psi, \psi) \geq |\psi| \Delta |\psi|.$$

Наиболее важные в нашем контексте эллиптические операторы образуют комплекс

$$(6.22) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta) \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \eta) \xrightarrow{\sqrt{2}\mathcal{D}} \Omega^2(\text{ad } \eta) \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{D} = P_- D$, как в гл. 4. Имея в виду формулу (6.18), мы должны связать лапласианы комплекса (6.22), т.е. операторы

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^0(\text{ad } \eta) & \Omega^1(\text{ad } \eta) & \Omega_-^2(\text{ad } \eta) \\
 \downarrow D^*D & \downarrow 2\mathcal{D}^*\mathcal{D} + DD^* & \downarrow 2\mathcal{D}\mathcal{D}^* \\
 \Omega^0(\text{ad } \eta) & \Omega^1(\text{ad } \eta) & \Omega_-^2(\text{ad } \eta)
 \end{array}$$

с лапласианом $\nabla^*\nabla$ оператора ковариантного дифференцирования

$$(6.23) \quad \Omega^i(\text{ad } \eta) \xrightarrow{\nabla} T^*M \otimes \Omega^i(\text{ad } \eta), \quad i = 0, 1, 2.$$

Такая связь существует, поскольку совпадают их символы. (Этим, кстати, объясняется наличие множителя $\sqrt{2}$ у оператора D в эллиптическом комплексе (6.22).) Искомая связь выражается так называемыми формулами Вейтценбёка

$$(6.24) \quad D^*D = \nabla^*\nabla \text{ на } \Omega^0(\text{ad } \eta),$$

$$(6.25) \quad 2\mathcal{D}^*\mathcal{D} + DD^* = \nabla^*\nabla + \text{Ric}(\cdot) - 2(\cdot \lrcorner P_+ F) \text{ на } \Omega^1(\text{ad } \eta),$$

$$(6.26) \quad 2\mathcal{D}\mathcal{D}^* = \nabla^*\nabla - 2W^-(\cdot) + \frac{R}{3} + [P_- F, \cdot] \text{ на } \Omega_-^2(\text{ad } \eta)$$

(ср. [Т, § 2], [Ра, § 1], [Вou]). Доказательству этих формул посвящено приложение С. Поясним некоторые из обозначений, входящих в формулы Вейтценбёка. В общем случае оператор римановой кривизны разлагается на неприводимые части $W \oplus \text{Ric}_0 \oplus R$, где $W: \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ — кривизна Вейля, $\text{Ric}_0: \Omega^1 \rightarrow \Omega^1$ — бесследовая кривизна Риччи и $R \in \mathbb{R}$ — скалярная кривизна. Полным тензором Риччи называется прямая сумма $\text{Ric} = \text{Ric}_0 \oplus R$. В размерности 4 кривизна Вейля разлагается на автодуальную и антиавтодуальную составляющие: $W = W^+ + W^-$ [ST]. Действие оператора кривизны на числовые формы тривиально продолжается на формы со значениями в $\text{ad } \eta$. Как и прежде, кривизна F связности D разлагается в прямую сумму $F = P_+ F + P_- F$. Кроме того, существуют $SO(4)$ -эквивариантные билинейные отображения

$$(6.27) \quad \lrcorner: \Omega^1 \otimes \Omega_-^2 \rightarrow \Omega^1,$$

$$(6.28) \quad [,]: \Omega_-^2 \otimes \Omega_-^2 \rightarrow \Omega_-^2,$$

индуцированные внутренним умножением и скобками Ли; во втором случае мы пользуемся отождествлением $\Omega_-^2 \simeq \mathfrak{so}(3)$. Зависящие от внешней кривизны слагаемые в формулах (6.25) и (6.26) определяются с помощью билинейных отображений (6.27), (6.28) и скобок Ли в расслоении $\text{ad } \eta$. Лихнерович [L] и Бохнер [Bo] пользовались формулами типа (6.24) – (6.26) для доказательства теорем об обращении в нуль. Мы будем для получения необходимых оценок комбинировать формулы Вейтценбёка с неравенствами (6.18) и (6.21).

Отметим еще одно полезное соотношение:

$$(6.29) \quad \mathcal{D}^*(f\Phi) = f\mathcal{D}^*\Phi - df \lrcorner \Phi, \quad f \in \Omega^0, \quad \Phi \in \Omega_-^2(\text{ad } \eta).$$

Знак минус в нем обусловлен интегрированием по частям.

Сформулируем теперь несколько теорем Соболева. Предположим, что многообразие M компактно. Напомним (гл. 3), что пространство Соболева $H_1(\xi)$ состоит из тех L^2 -сечений ψ , первая производная $\nabla\psi$ которых также лежит в L^2 . Формула

$$\|\psi\|_{H_1}^2 = \int_M |\psi|^2 + |\nabla\psi|^2$$

определяет норму на пространстве $H_1(\xi)$. Теорема вложения Соболева в размерности 4 утверждает, что пространство $H_1(\xi)$ непрерывно вкладывается в $L^4(\xi)$ [Tr, § 24]. Другими словами, для некоторой константы c_{10} , зависящей от M , имеет место неравенство

$$(6.30) \quad \left(\int_M |\psi|^4 \right)^{1/4} = \|\psi\|_{L^4} \leq c_{10} \|\psi\|_{H_1} = \\ = c_{10} \left(\int_M |\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 \right)^{1/2}.$$

Эта оценка выводится из неравенства Соболева для обычных функций с помощью неравенства Като (6.20). Наконец, если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то из теоремы Реллиха следует, что $H_1 \hookrightarrow L^{4-\varepsilon}$ – компактное вложение. Подчеркнем, что этот результат, так же как и неравенство (6.30), существенно опираются на компактность исходного многообразия M .

В гл. 8 нам понадобятся более тонкие результаты о пространствах Соболева ($[Au]$, $[Ma]$, $[P]$). Пусть ξ — векторное расслоение над компактным римановым n -мерным многообразием M , снабженное метрикой и связностью. Тогда пространство L^p_k -сечений расслоения ξ ($k \in \mathbb{Z}^+$, $p \geq 1$) определяется как банахово пополнение пространства $C^\infty(\xi)$ по норме

$$(6.31) \quad \|\psi\|_{L^p_k} = \left(\int_M |\psi|^p + |\nabla \psi|^p + \dots + |\nabla^k \psi|^p \right)^{1/p}.$$

Отметим, что $L^2_l = H_l$. Общая теорема вложения Соболева утверждает, что

$$(6.32) \quad L^p_k \subset L^{p'}_{k'}, \text{ если } k - \frac{n}{p} \geq k' - \frac{n}{p'} \text{ и } k > k'$$

(в случаях $p' = \infty$ или $p = 1$ требуется строгое неравенство) и

$$(6.33) \quad L^p_k \subset C^l, \text{ когда } k - \frac{n}{p} > l.$$

Если выполняется строгое неравенство

$$k - \frac{n}{p} > k' - \frac{n}{p'},$$

то вложение (6.32) компактно; в частности, всегда компактно вложение (6.33).

Сформулируем теперь теорему умножения Соболева. Эта теорема утверждает, что отображение

$$(6.34) \quad L^{p_1}_{k_1} \otimes L^{p_2}_{k_2} \rightarrow L^p_k$$

определено и непрерывно, если

$$\left(k_1 - \frac{n}{p_1}\right) + \left(k_2 - \frac{n}{p_2}\right) \geq \left(k - \frac{n}{p}\right),$$

$$k_1, k_2 \geq k \text{ и } p_1 k_1, p_2 k_2 < n.$$

(Здесь $p_1, p_2 \neq 1$ и $p \neq \infty$.) Последнее ограничение означает, среди прочего, что пространства $L^{p_i}_{k_i}$ в (6.34) не

состоят из непрерывных функций (см. (6.33)). В непрерывном случае ($pk > n$) пространство L_k^p является алгеброй. Кроме того, если в непрерывном случае $L_{k'}^{p'} \subset L_k^p$, то L_k^p является $L_{k'}^{p'}$ -модулем. Особая осмотрительность требуется в пограничных случаях $p_i k_i = n$.

Двойственным к L_k^p служит пространство распределений L_{-k}^q , где p и q связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Теорема умножения для этих пространств получается по двойственности. Следовательно, отображение

$$L_{k_1}^{p_1} \otimes L_{-k}^q \rightarrow L_{-k_2}^{q_2}$$

непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно (6.34). Двойственным к непрерывному случаю ($pk > n$) является умножение

$$L_k^p \otimes L_{-k}^q \rightarrow L_{-k}^q,$$

так как если $L_{k'}^{p'} \subset L_k^p$, то L_{-k}^q есть $L_{k'}^{p'}$ -модуль. Правая композиция с гладкой функцией линейно отображает пространство L_k^p в L_k^p . Лемма о композиции утверждает, что левая композиция с гладкой функцией отображает L_k^p в L_k^p при условии $pk > n$.

Напомним теперь элементарные свойства эллиптических уравнений в частных производных. Начнем с принципа максимума.

Предложение 6.35. Предположим, что функция $f \in C^2$ удовлетворяет на компактной области $\mathcal{O}$ неравенству

$$\Delta f + \gamma f \leq 0, \quad \gamma \geq 0,$$

и, кроме того, $f \leq 0$ на границе $\partial \mathcal{O}$. Тогда $f \leq 0$ всюду в $\mathcal{O}$.

Напомним читателю, что по принятому нами соглашению о знаке лапласиана $-\Delta f$ есть след гессиана функции f в критической точке. Следующее утверждение известно как теорема о среднем значении [GW, § 3], [Mor, теорема 5.3.1].

Предложение 6.36. Предположим, что положительная функция $f \in C^2$ удовлетворяет на компактной области $\mathcal{O}$ неравенству $\Delta f \leq 0$. Тогда для любой точки $x \in \mathcal{O}$

$$f(x) \leq c_{11} \int_{\mathcal{O}} f.$$

где константа c_{11} зависит от расстояния $\text{dist}(x, \partial \mathcal{O})$ и метрики, определяющей оператор Δ .

Теорема об эллиптической регулярности утверждает, что слабое решение u эллиптической системы $Lu = 0$ является гладким во всех внутренних точках области. Точный смысл понятия гладкости зависит от гладкости коэффициентов оператора L . Поскольку наша метрика принадлежит всего лишь классу C^k (гл. 3), гладкость у нас не всегда означает наличие непрерывных производных любого порядка. Тем не менее, почти не теряя строгости, можно в дальнейшем под гладкостью понимать бесконечную дифференцируемость, и мы не будем делать никаких уточнений.

Предложение 6.37. Пусть D — автодуальная связность. Тогда существует такое соболевское калибровочное преобразование $z \in \mathcal{G}$, что $z^*(D)$ — гладкая связность.

Более общий вариант этого утверждения доказан в книге [Pa, § 5], и мы вернемся к нему в гл. 8.

Доказывая, что пространство модулей $\hat{\mathcal{M}}$ является многообразием (гл. 3), мы пользовались теоремой об однозначном продолжении. Точная ее формулировка такова [Ar].

Предложение 6.38. Пусть L — эллиптический оператор второго порядка со скалярным символом и гладкими коэффициентами, определенный на связной области. Если $Lu = 0$ и решение u обращается в нуль на открытом множестве, то оно равно нулю тождественно.

Утверждение об однозначности продолжения перестает быть справедливым, если символ оператора L не скаляр.

Наконец, дадим вариационную характеристику наименьшего собственного значения [Tr, § 34].

Предложение 6.39. Пусть $\mathcal{D}: C^\infty(\xi) \rightarrow C^\infty(\xi')$ — дифференциальный оператор первого порядка на компактном многообразии. Предположим, что $\mathcal{D}\mathcal{D}^*: C^\infty(\xi') \rightarrow C^\infty(\xi')$ — эллиптический оператор. Если

$$\alpha = \inf_{u \in C^\infty(\xi')} \left(\frac{\int_M |\mathcal{D}^* u|^2}{\int_M |u|^2} \right),$$

то уравнение $\mathcal{D}\mathcal{D}^* u - \alpha u = 0$ имеет гладкое решение.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АВТОДУАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА — МИЛЛСА

В гл. 7 — 9 мы систематически будем пользоваться конформной инвариантностью автодуальных уравнений Янга — Миллса. Пусть $g \rightarrow \kappa^2 g$ — конформное преобразование метрики. Тогда 1-формы A , 2-формы F и форма объема vol преобразуются по правилам

$$(6.40) \quad \begin{aligned} |A| &\rightarrow \kappa^{-1} |A|, \\ |F| &\rightarrow \kappa^{-2} |F|, \\ vol &\rightarrow \kappa^4 vol. \end{aligned}$$

Оператор Ходжа $*$ определяется на 2-формах соотношением

$$F_1 \wedge * F_2 = (F_1, F_2) vol;$$

в силу (6.40), правая часть этого соотношения конформно инвариантна. Отсюда немедленно следует конформная инвариантность автодуальных уравнений Янга — Миллса (2.19). Кроме того, конформно инвариантны нормы

$$\begin{aligned} \|A\|_{L^4} &= \left(\int_M |A|^4 * 1 \right)^{1/4}, \\ \|F\|_{L^2} &= \left(\int_M |F|^2 * 1 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

которые будут использоваться для получения конформно инвариантных оценок.

В заключение настоящей главы сформулируем две теоремы Карен Уленбек, отсылая за доказательствами к оригинальным работам.

Т е о р е м а 6.41 [U1, теорема 1.5]. Пусть D_n – последовательность гладких связностей и F_n – кривизна D_n . Предположим, что $\|F_n\|_{L^\infty} < c_{12}$ при всех n . Тогда для некоторой подпоследовательности индексов $\{n'\} \subseteq \{n\}$ существуют такие калибровочные преобразования $\mathfrak{z}_{n'} \in \mathfrak{G}$ и связность D , что $\mathfrak{z}_{n'}^*(D_{n'})$ слабо сходится к D в L_1^p ($1 < p < \infty$) и сильно сходится к D в L^p ($1 < p$).

По существу, это есть теорема компактности: из последовательности связностей выбирается сходящаяся подпоследовательность. Более подробное обсуждение этой ситуации мы отложим до гл. 8. Следующий результат Уленбек – это теорема об устранении особенностей, утверждающая, что связности с конечным действием не имеют особых точек. Доказательство этой теоремы содержится в приложении D.

Т е о р е м а 6.42 [U2, теорема 4.1]. Фиксируем точку $x \in M$ и предположим, что D – автодуальная связность в расслоении $\eta \rightarrow M \setminus \{x\}$ с конечным действием

$$\int_{M \setminus \{x\}} |F_D|^2 < \infty.$$

Тогда для некоторого автоморфизма $\mathfrak{z} \in C^\infty(\text{Aut } \eta)$ расслоение $\mathfrak{z}^*(\eta)$ продолжается до гладкого расслоения $\bar{\eta} \rightarrow M$, а связность D продолжается до гладкой автодуальной связности $\bar{D}$ в $\bar{\eta}$.

Здесь $C^\infty(\text{Aut } \eta)$ – группа послойных автоморфизмов (калибровочных преобразований) расслоения η . Класс Чжэня $c_2(\bar{\eta})$ априори неконтролируем, даже если η является ограничением расслоения, определенного на всем многообразии M . Однако для автодуальных связностей на $SU(2)$ -расслоениях

$$c_2(\bar{\eta})[M] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M |F_D|^2 = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{M \setminus \{x\}} |F_D|^2.$$

В этом случае расслоение $\bar{\eta}$ полностью описывается характеристическим числом c_2 , и, следовательно, действие $\int_{M \setminus \{x\}} |F_D|^2$ определяет его топологический тип.

Глава 7

ТЕОРЕМА ТАУБСА

Описанная в предыдущей главе процедура прививки дает нам семейство почти автодуальных связностей, центрированных около каждой точки $y \in M$. Мы хотим малым возмущением превратить эти связности в автодуальные. Пусть D — почти автодуальная связность (точное определение будет дано позже) и F — ее кривизна. Тогда кривизна F_A возмущенной связности $D + A$ имеет вид

$$F_A = F + DA + A \wedge A,$$

а ее антиавтодуальная часть $P_- F_A$ равна

$$P_- F_A = P_- F + P_- DA + P_- (A \wedge A).$$

Как и прежде, положим $\mathcal{D} = P_- D$ и обозначим через

$$\#: \Omega^1(\text{ad } \eta) \otimes \Omega^1(\text{ad } \eta) \rightarrow \Omega_-^2(\text{ad } \eta)$$

симметрическое билинейное отображение, задаваемое формулой

$$A_1 \# A_2 = \frac{1}{2} P_- (A_1 \wedge A_2 + A_2 \wedge A_1).$$

Тогда условие $P_- F_A = 0$ можно переписать в виде

$$(7.1) \quad \mathcal{D}A + A \# A = -P_- F.$$

К сожалению, уравнение (7.1) не является эллиптическим — из-за наличия калибровочной симметрии его символ имеет ядро. Этот недостаток можно устранить, потребовав, чтобы вектор A был

перпендикулярным к орбитам группы калибровочных преобразований. Наиболее естественно взять вектор A равным $\mathcal{D}^*u$ для некоторого $u \in \Omega_-^2(\text{ad } \eta)$. Тогда

$$(7.2) \quad \mathcal{L}u = \mathcal{D}\mathcal{D}^*u + \mathcal{D}^*u \# \mathcal{D}^*u = -P_-F$$

есть нелинейное эллиптическое уравнение, и если $u \in \Omega_-^2(\text{ad } \eta)$ удовлетворяет этому уравнению, то $D + \mathcal{D}^*u$ — автодуальная связность. Настоящая глава посвящена доказательству того, что уравнение (7.2) имеет решения. Так как P_-F мало (связность D почти автодуальна), можно ожидать, что решение $\mathcal{D}^*u$ также будет малым, поэтому подходящей меркой для него будет конформно инвариантная норма $\|\cdot\|_{L^4}$. Эта дополнительная оговорка (что норма $\|\mathcal{D}^*u\|_{L^4}$ мала) включается по техническим причинам.

Будем решать уравнение (7.2) с помощью так называемого метода непрерывности. С этой целью включим уравнение (7.2) в семейство $\mathcal{E}_t$ уравнений

$$(7.3) \quad \mathcal{E}_t: \mathcal{L}u_t = -tP_-F, \quad t \in [0, 1].$$

Ясно, что $\mathcal{E}_0$ тривиально разрешимо (решением является $u_0 = 0$), а $\mathcal{E}_1$ есть уравнение (7.2), которое мы хотим решить. Пусть I — подмножество единичного отрезка $[0, 1]$, задаваемое условием

$$I = \{t \in [0, 1]: \mathcal{E}_t \text{ имеет решение } u_t \text{ с малой нормой } \|\mathcal{D}^*u_t\|_{L^4}\}.$$

(Позже мы уточним условие на норму.) Это множество непусто. Если мы сможем доказать, что $I = [0, 1]$, то тем самым мы «продолжим» тривиальное решение уравнения $\mathcal{E}_0$ до искомого решения уравнения $\mathcal{E}_1$. В этом и состоит метод непрерывности. Итак, нужно доказать, что I одновременно открыто и замкнуто. Тогда $I = [0, 1]$ и уравнение $\mathcal{E}_1$ разрешимо.

Сначала докажем, что множество I открыто. Для этого достаточно установить, что оператор $\mathcal{L}$ локально обратим в окрестности решения u_t . В силу теоремы об обратной функции,

это эквивалентно обратимости линейного оператора

$$(7.4) \quad L_t(\Phi) = \mathcal{D}\mathcal{D}^*\Phi + 2\mathcal{D}^*u_t \# \mathcal{D}^*\Phi.$$

В частности, должен быть обратимым оператор $L_0 = \mathcal{D}\mathcal{D}^*$; другими словами, первое собственное значение α оператора $\mathcal{D}\mathcal{D}^*$ должно быть положительным. Это утверждение мы докажем в первую очередь. Существенным здесь является тот факт, что для достаточно малых λ оценка на α не зависит от λ (число λ — это параметр, характеризующий размер P_-F). Действительно, λ может пробегать полуинтервал $(0, \bar{\lambda}]$, причем величина $\bar{\lambda}$ будет фиксирована лишь в самом конце главы. Заметим, что в этом месте используется положительная определенность формы пересечений. Обратимость оператора L_t без труда получается из обратимости L_0 .

Второй шаг в методе непрерывности — доказательство замкнутости множества I . Как правило, он более труден. Сначала нужно получить априорные оценки на решения u_t . Тогда каждой сходящейся последовательности $t_n \rightarrow t_0$ в I будет соответствовать слабо сходящаяся (под)последовательность $u_{t_n} \rightarrow u_{t_0}$. Если априорные оценки достаточно сильны, предельное значение u_{t_0} удовлетворяет уравнению $\mathcal{E}_{t_0}$. Успех на этом шаге зависит от правильного выбора пространства, в котором решаются уравнения $\mathcal{E}_t$. С одной стороны, оно должно быть достаточно жестким, чтобы сохранилось уравнение, а с другой стороны — достаточно податливым, чтобы можно было доказать априорные оценки.

В предыдущей главе были разработаны необходимые для этого аналитические средства. Вспомним формулу Вейтценбёка (6.25) для I -форм:

$$2\mathcal{D}^*\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{D}^* = \nabla^*\nabla + \text{Ric}(\cdot) - 2(\cdot \lrcorner P_+F).$$

Однако кривизна F_λ наших привитых связностей бесконечно возрастает при $\lambda \rightarrow 0$ (согласно (6.12), $\|F_\lambda\|_{L^\infty} = O(\lambda^{-2})$), и значение этой формулы для получения оценок практически сводится на нет. В игру теперь в полную силу вступает конформная инвариантность: мы раздуваем метрику в окрестности точки y , так чтобы кривизна стала ограниченной. Правда, за это прихо-

Дится платить — теперь мы должны выполнять оценки на некомпактном многообразии $M_y = M \setminus \{y\}$. Хотя обращаться с некомпактными многообразиями довольно трудно, нас выручает то обстоятельство, что в окрестности точки y раздутое многообразие M_y выглядит почти как цилиндр. Это позволяет нам приспособить к M_y стандартную технику для компактных многообразий, сшивая вместе оценки для компактной части M_y и стандартного цилиндра.

Для того чтобы доказать существование на многообразии M автодуальных связностей, мы применяем к привитым связностям так называемую проекцию Таубса. В дальнейшем эта техника найдет применение при доказательстве теоремы о воротнике (гл. 9), поэтому изложение в этой главе ведется так, чтобы охватить все возможные частные случаи. Оригинальное доказательство теоремы Таубса содержится в работе [Т].

РАЗДУТИЕ МЕТРИКИ

Рассмотрим вначале плоскую метрику δ на $\mathbb{R}^n$. Обозначая через r расстояние от начала координат, введем на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ конформно эквивалентную метрику δ/r^2 . Очевидно, что в полярных координатах $r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}$ пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ с этой метрикой представляет собой цилиндр, искаженный в направлении оси:

$$\delta/r^2 = \frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2,$$

где $d\theta^2 = h_{ij} d\theta^i d\theta^j$ — метрика на единичной сфере S^{n-1} . Подстановка $r = e^{-\tau}$ дает систему координат, в которой δ/r^2 превращается в стандартную метрику

$$\tilde{\delta} = d\tau^2 + d\theta^2$$

на прямом цилиндре.

Когда мы раздуваем произвольную метрику g , получается метрика, которая лишь приближенно равна $\tilde{\delta}$. Чтобы придать

строгий смысл этому утверждению, нужно несколько уточнить неравенство (6.13). А именно, запишем метрику g в геодезических полярных координатах в виде

$$g = dr^2 + g_{ij} d\theta^i d\theta^j,$$

где

$$g_{ij} = r^2 h_{ij} + O(r^4);$$

слагаемое $O(r^4)$ включает в себя кривизну g (см. [се, § 1.4]). Тогда

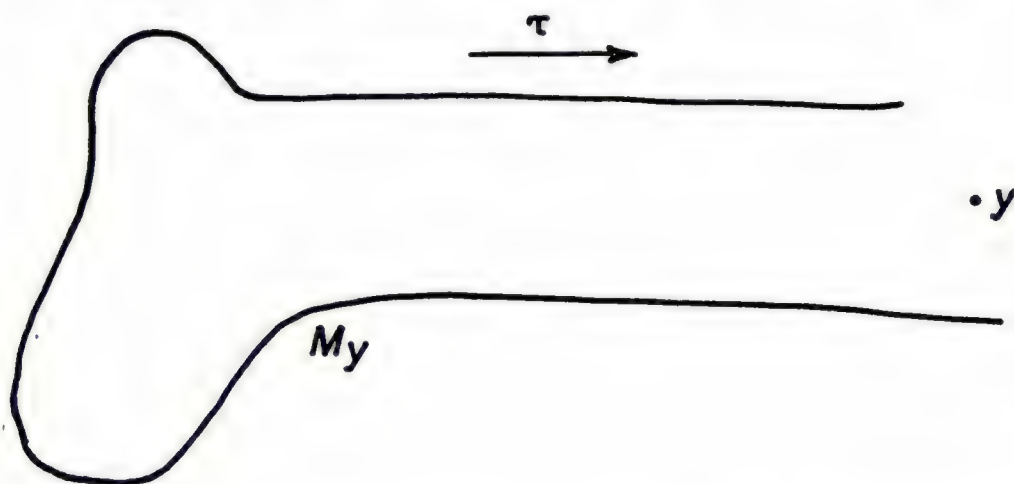
$$|g/r^2 - \delta/r^2| = O(r^2),$$

или, переходя к переменной τ ,

$$(7.5) \quad |\tilde{g} - \tilde{\delta}| = O(e^{-2\tau}).$$

Следовательно, при $\tau \rightarrow \infty$ метрика $\tilde{g}$ экспоненциально стремится к цилиндрической метрике. Отсюда следует, что все производные метрики $\tilde{g}$ экспоненциально стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Для производных $\partial/\partial\theta^i$ это утверждение очевидно. Что же касается производной $\partial/\partial\tau$, указанное утверждение вытекает из равенства $\partial/\partial\tau = -r \partial/\partial r$ и того факта, что функция $g(r)$ является гладкой в окрестности начала координат.

Применяя сказанное к окрестности точки $y \in M$, мы получаем метрику g_y на проколоте многообразии $M_y = M \setminus \{y\}$:



Более подробно, пусть $\rho(M)$ — радиус инъективности многообразия M . Выберем гладкую функцию β , удовлетворяющую

следующим условиям:

$$\beta(r) = \begin{cases} 1/r^2, & \text{если } 0 < r \leq \frac{\rho(M)}{2}, \\ \text{убывает,} & \text{если } \frac{\rho(M)}{2} \leq r \leq \rho(M), \\ 1, & \text{если } \rho(M) \leq r. \end{cases}$$

Тогда в геодезических полярных координатах в окрестности точки y имеет смысл выражение

$$g_y(x) = \frac{g(x)}{\beta(\text{dist}(x, y))}.$$

Так как метрика g_y и ее первые две производные стремятся к $\tilde{g}$ при $\tau \rightarrow \infty$, то кривизна метрики g_y при $\tau \rightarrow \infty$ экспоненциально стремится к кривизне цилиндра. Поскольку цилиндр является конформно плоским ($W^+ = W^- = 0$) и имеет скалярную кривизну $R = 6$, для любого числа ε_1 найдется такое число $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon_1)$, что

$$(7.6) \quad |W_{g_y}^-(\tau, \theta)| < \varepsilon_1 \quad \text{при } \tau \geq \tau_1,$$

$$(7.7) \quad |R(\tau, \theta) - 6| < \varepsilon_1 \quad \text{при } \tau \geq \tau_1.$$

Имея в своем распоряжении раздутую метрику, мы теперь в состоянии придать точный смысл понятию почти автодуальной связности. Обозначим через B_r шар радиуса r с центром в точке $y \in M$ и через $C_{\bar{\tau}}$ — множество тех точек из M , где $\tau > \bar{\tau}$. Тогда связность D называется почти автодуальной связностью радиуса λ (в окрестности $y \in M$), если ее кривизна F удовлетворяет при $\bar{\tau} = -\ln 2\sqrt{\lambda}$ следующим условиям:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} |F| &\leq c_{12} \quad \text{на } C_{\bar{\tau}}, \\ |F| &\leq c_{13}\sqrt{\lambda} \quad \text{на } M_y \setminus C_{\bar{\tau}}, \\ |P_- F| &\leq \varepsilon_2 \quad \text{на } C_{\bar{\tau}}, \end{aligned}$$

$$|P_- F| \leq c_{14} \text{ на } M_y \setminus C_{\bar{\tau}},$$

$$\|P_- F\|_{L^2} \leq c_{15} \lambda.$$

Все нормы здесь берутся по отношению к метрике g_y . (Напомним, что норма $\|\cdot\|_{L^2}$ конформно инвариантна на 2-формах.) Константы $c_{12}, \dots, c_{15}$ могут быть выбраны произвольно, ε_2 будет определена позже. Привитые связности D_λ являются почти автодуальными радиуса $\lambda \leq \lambda_1 = \min(\rho(M)^2/4, \varepsilon_2/c_2)$, поскольку в исходной метрике g по теореме 6.12 выполняются следующие неравенства:

$$|F_\lambda| \leq c_1 \lambda^{-2} \text{ на } C_{\bar{\tau}},$$

$$|F_\lambda| = 0 \text{ на } M_y \setminus C_{\bar{\tau}},$$

$$|P_- F_\lambda| \leq c_2 \text{ на } C_{\bar{\tau}},$$

$$|P_- F_\lambda| = 0 \text{ на } M_y \setminus C_{\bar{\tau}},$$

$$\|P_- F_\lambda\|_{L^2} \leq c_2 \lambda.$$

Можно сказать, что связность почти автодуальна, если ее кривизна почти автодуальна и локализована около точки y .

Докажем теперь, что некоторые стандартные результаты для компактных многообразий переносятся на проколотое многообразие M_y . Впредь для удобства мы будем подразумевать, что радиус инъективности $\rho(M) \geq 1$.

Предложение 7.9. Пусть f — дважды дифференцируемая функция на M_y .

- (i) Если $f, df \in L^1(M_y)$, то $\int_{M_y} \Delta f = 0$.
- (ii) $\|f\|_{L^4} \leq c_{16} \|f\|_{H_1}$.

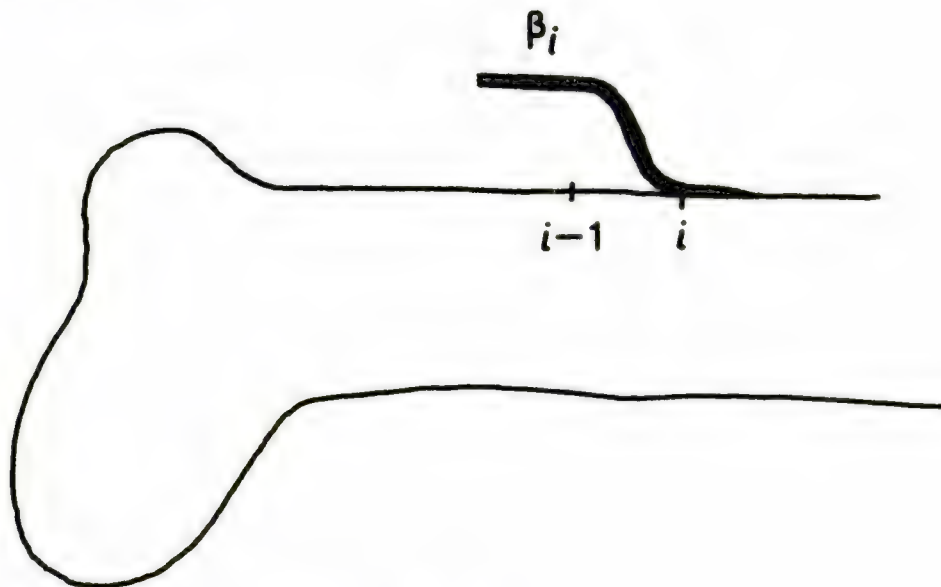
Разумеется, (i) — это интегрирование по частям, а (ii) — неравенство Соболева (6.30).

Доказательство. (i) Пусть $\beta_i \in C_0^\infty(M_y)$ —

такие гладкие срезающие функции с компактными носителями, что

$$\beta_i(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \leq i-1, \\ 0 & \text{при } \tau \geq i \end{cases}$$

и $\beta_{i+1}(\tau) = \beta_i(\tau-1)$:

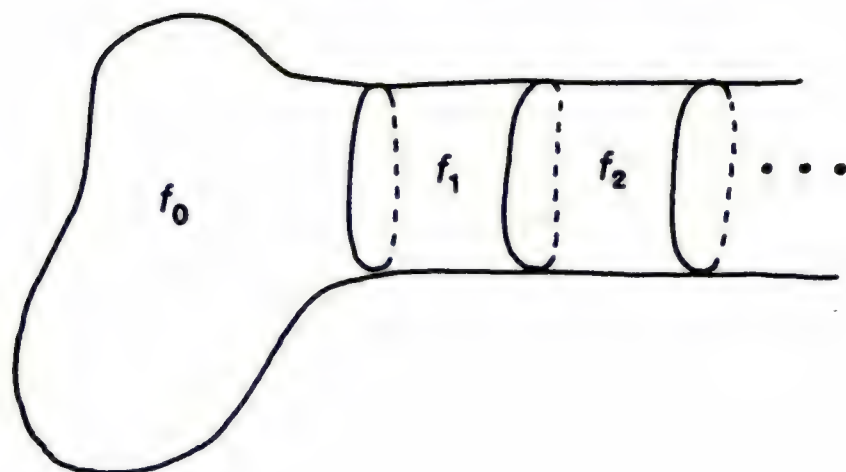


Тогда интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_y} \beta_i \Delta f \right| &= \left| - \int_{M_y} f \Delta \beta_i + 2 \int_{M_y} (d\beta_i, df) \right| \leq \\ &\leq \|\Delta \beta_i\|_{L^\infty} \int_{i-1 \leq \tau \leq i} |f| + 2 \|d\beta_i\|_{L^\infty} \int_{i-1 \leq \tau \leq i} |df|, \end{aligned}$$

а сумма, стоящая в правой части этого равенства, стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Равномерные оценки производных функции β основаны на том, что оценка (7.5) почти равномерна.

(ii) Пусть c_{16} — максимальная из соболевских констант для многообразия M и для цилиндра. (На самом деле c_{16} будет несколько больше, чтобы учесть малое отклонение g_y от метрики цилиндра.) Пусть $f_i = f|_{i-1 \leq \tau \leq i}$, а f_0 есть ограничение f на компактную часть многообразия M_y .



Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_{M_y} |f|^4 \right)^{1/2} &\leq \sum_i \left(\int |f_i|^4 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_i c_{16} \int |f_i|^2 + |df_i|^2 = c_{16} \int_{M_y} |f|^2 + |df|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем теперь принцип максимума для M_y в виде, в котором он будет применяться в следующем разделе и в гл.9.

Предложение 7.10. Пусть $u(\tau, \theta)$ — неотрицательная функция в области $\{\tau_l \leq \tau \leq \tau_n\} \subset M_y$, удовлетворяющая условиям

$$(i) \quad \Delta u + \gamma'^2 u \leq 0,$$

$$(ii) \quad u(\tau_l, \theta) \leq \alpha_l,$$

$$(iii) \quad u(\tau_n, \theta) \leq \alpha_n.$$

Тогда

$$u(\tau, \theta) \leq \alpha_l e^{-\gamma(\tau - \tau_l)} + \alpha_n e^{-\gamma(\tau_n - \tau)},$$

где $\gamma = \gamma(\tau_\ell) < \gamma'$, причем $\gamma(\tau_\ell) \rightarrow \gamma'$ при $\tau_\ell \rightarrow \infty$.

Прежде чем приступить к доказательству, уместно еще раз напомнить читателю наше соглашение о знаке лапласиана (6.19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что на отрезке $[t_\ell, t_n] \subset \mathbb{R}$ функция

$$v(t) = \alpha_\ell e^{-\gamma(t-t_\ell)} + \alpha_n e^{-\gamma(t_n-t)}$$

является решением одномерного уравнения Лапласа

$$-\frac{d^2 v}{dt^2} + \gamma^2 v = 0$$

с граничными условиями $v(t_\ell) \geq \alpha_\ell$, $v(t_n) \geq \alpha_n$. Положим $\tilde{v} = v \circ \tau$ на «цилиндре» $\{\tau_\ell \leq \tau \leq \tau_n\} \subset M_y$. Подставляя явное выражение для метрики $\tilde{g}$ в стандартную формулу для лапласиана

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

находим, что

$$\Delta \tilde{v} = \left(-\frac{d^2 v}{dt^2} + O(e^{-2t}) \frac{dv}{dt} \right) \circ \tau.$$

Следовательно,

$$\Delta \tilde{v} \geq -(\gamma^2 + \gamma O(e^{-2\tau})) \tilde{v} \geq -\gamma'^2 \tilde{v}$$

для подходящего γ' . Поэтому

$$\Delta(u - \tilde{v}) + \gamma'^2(u - \tilde{v}) \leq 0$$

и $u - \tilde{v} \leq 0$ в точках $\tau = \tau_\ell, \tau_n$. Применяя теперь обычный

принцип максимума (6.35), находим, что $u \leq \tilde{v}$ всюду на $\{\tau_\ell \leq \tau \leq \tau_n\}$, как и требовалось.

ОЦЕНКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Здесь мы докажем, что если D — почти автодуальная связность с достаточно малым радиусом λ , то первое собственное значение оператора $\mathcal{D}\mathcal{D}^*$ положительно. Эллиптические операторы на некомпактных многообразиях могут иметь непрерывный спектр и в общем случае не обладают собственными значениями. Однако мы установим, что для некомпактного многообразия M_y все еще справедлива вариационная характеристика первого собственного значения, по крайней мере если это собственное значение мало.

Л е м м а 7.11. Пусть D — почти автодуальная связность радиуса λ . Положим

$$\alpha = \inf_{u \in \Omega_-^2(\text{ad } \eta)} \left(\frac{\int_{M_y} |\mathcal{D}^* u|^2}{\int_{M_y} |u|^2} \right).$$

Если $\alpha < 1$, то существует сечение $u \in L^2(M; \text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^* M)$, удовлетворяющее уравнению

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* u - \alpha u = 0.$$

Заметим, что пространство сечений $L^2(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^* M)$ равным образом можно рассматривать и для M , и для M_y , поскольку его норма конформно инвариантна на четырехмерных многообразиях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для больших положительных целых чисел n определим

$$\alpha_n = \inf_{\substack{u \in \Omega_-^2(\text{ad } \eta) \\ u|_{\tau=n} = 0}} \left(\frac{\int_{M_y \setminus C_n} |\mathcal{D}^* u|^2}{\int_{M_y \setminus C_n} |u|^2} \right).$$

В силу предложения 6.39 найдутся $u_n \in L^2(M \setminus C_n)$, удовлетворяющие уравнениям $\mathcal{D}\mathcal{D}^* u_n - \alpha_n u_n = 0$. Из этого предложения вытекает, что последовательность α_n убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ (вспомним принцип трембона из гл. 3!).

Положим $\tau_2 = \max(\tau_1, -\ln 2\sqrt{\lambda})$ и обозначим через K компактное множество $M_y \setminus C_{\tau_2+1}$. Теорема об однозначном продолжении 6.38 показывает, что на K существует положительная масса; следовательно, мы можем так нормировать сечение u_n , чтобы

$$(7.12) \quad \int_K |u_n|^2 = 1.$$

Формула Вейтценбёка (6.26) дает оценку

$$\begin{aligned} \int_K |\nabla u_n|^2 &= \int_K (\nabla^* \nabla u_n, u_n) = \\ &= \int_K (2\mathcal{D}\mathcal{D}^* u_n + 2W^-(u_n) - \frac{R}{3} u_n - [P_- F, u_n], u_n) \leq \\ &\leq (2\alpha_n - \frac{R}{3} + 2 \|W^-\|_{L^\infty(K)} + \|P_- F\|_{L^\infty(K)}). \end{aligned}$$

Согласно (7.8), ее правая часть ограничена. Значит, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $H_1(K)$, и по теореме Реллиха в $L^2(K)$ существует сильно сходящаяся подпоследовательность $u_n \rightarrow \tilde{u}$ (которую мы для простоты обозначаем так же, как саму последовательность).

Рассмотрим теперь некомпактную часть C_{τ_2} и снова применим формулу Вейтценбёка (6.26), на сей раз вместе с неравенством (6.18):

$$(7.13) \quad \frac{1}{2} \Delta |u_n|^2 \leq (\nabla^* \nabla u_n, u_n) \leq \\ \leq \left(2\alpha_n - \frac{R}{3} + 2 \|W^-\|_{L^\infty(C_{\tau_2})} + \|P_- F\|_{L^\infty(C_{\tau_2})} \right) |u_n|^2.$$

В силу неравенств (7.6)–(7.8)

$$\left(2\alpha_n - \frac{R}{3} + 2 \|W^-\|_{L^\infty(C_{\tau_2})} + \|P_- F\|_{L^\infty(C_{\tau_2})} \right) |u_n|^2 \leq \\ \leq \left(2\alpha_n - 2 + \frac{\varepsilon_1}{3} + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) |u_n|^2.$$

Для больших n мы имеем $\alpha_n \sim \alpha$. Поэтому, взяв малые ε_1 и ε_2 и потребовав, чтобы число α было достаточно малым (верхняя грань α может быть взята произвольно близкой к 1 при $\tau_2 \rightarrow \infty$), мы получим, что

$$2\alpha_n - 2 + \frac{\varepsilon_1}{3} + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0.$$

Следовательно, при больших n на множестве C_{τ_2} выполняется неравенство

$$(7.14) \quad \Delta |u_n|^2 + \bar{\alpha} |u_n|^2 \leq 0$$

для некоторого $\bar{\alpha} > 0$. Это неравенство вместе с предложением 6.36 и условием (7.12) дает оценку

$$\max_{\tau=\tau_2} |u_n(\tau, \theta)|^2 \leq c_{11} \int_{\tau_2-1 \leq \tau \leq \tau_2+1} |u_n|^2 \leq c_{11} \int_K |u_n|^2 = c_{11}.$$

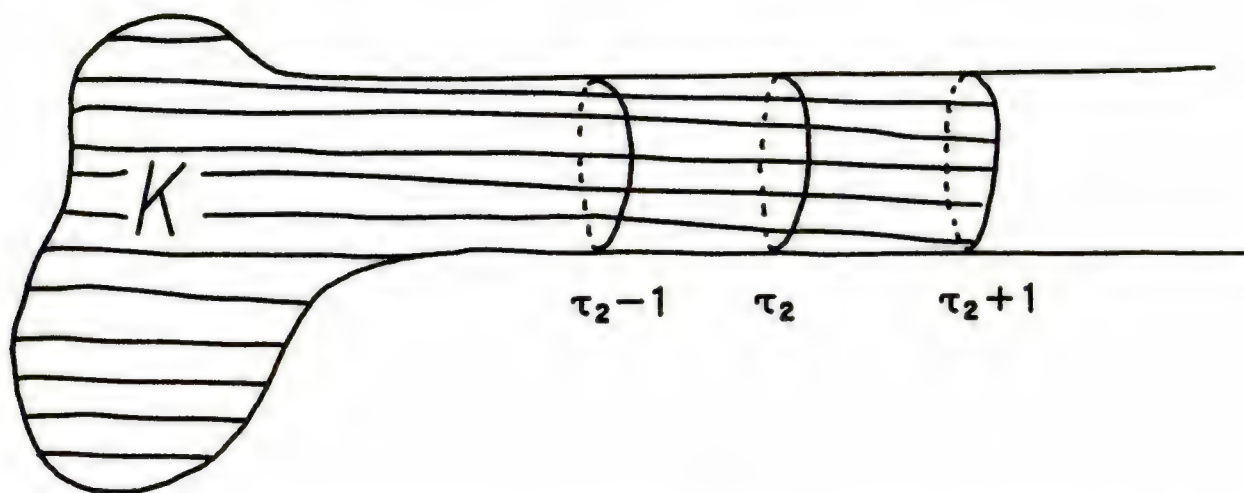
Вспомним теперь, что $|u_n|^2|_{\tau=n} = 0$. Поэтому, применяя предложение 7.10 с $\tau_l = \tau_2$, $\tau_n = n$, находим, что

$$(7.15) \quad |u_n(\tau, \theta)|^2 \leq c_{11} e^{-\gamma(\tau-\tau_2)}$$

для некоторого $\gamma < (\bar{\alpha})^{1/2}$. Проинтегрируем неравенство (7.15):

$$\int_{C_{\tau_2}} |u_n(\tau, \theta)|^2 \leq \int_{C_{\tau_2}} c_{11} e^{-\gamma(\tau - \tau_2)} = c_{17}.$$

Эта оценка показывает, что в пространстве $L^2(C_{\tau_2})$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $u_n \rightarrow \tilde{u}$. Кроме того, u_n сильно сходится к сечению $\tilde{u}$ на $K = M_y \setminus C_{\tau_2+1}$. Склеивая $\tilde{u}$ и $\tilde{u}$, мы получим сечение u на всем многообразии M_y :



Так как линейные уравнения сохраняются при переходе к слабому пределу, то $\mathcal{D}\mathcal{D}^*u - \alpha u = 0$ и $u \in L^2(M)$.

Чтобы получить оценку собственного значения, призовем на помощь наши предположения: о положительной определенности формы пересечений многообразия M и отсутствии нетривиальных представлений $\pi_1(M) \rightarrow SU(2)$.

Т е о р е м а 7.16. Существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\lambda_2 > 0$, что если D — почти автодуальная связность радиуса $\lambda \leq \lambda_2$ в окрестности некоторой точки $y \in M$, то

$$\alpha \int_{M_y} |u|^2 \leq \int_{M_y} |\mathcal{D}^*u|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда, фиксируя последовательности $\lambda_n \rightarrow 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, можно найти такие точки y_n , связности D_n и сечения u_n , что D_n почти автодуальна с радиусом λ_n в окрестности y_n и

$$\alpha_n \int_{M_{y_n}} |u_n|^2 = \int_{M_{y_n}} |\mathcal{D}_n^* u_n|^2.$$

В силу леммы 7.11 можно считать u_n собственными функциями оператора $\mathcal{D}_n \mathcal{D}_n^*$ с собственными значениями α_n . Поскольку многообразие M компактно, возможно выбрать точки y_n так, что $y_n \rightarrow y$. Из уравнений (7.8) следует, что кривизны $F_{\mathcal{D}_n}$ стремятся к нулю на компактных подмножествах K из M_y . Возьмем одно из таких компактных подмножеств K . Тогда из теоремы 6.41 и отсутствия нетривиальных представлений $\pi_1(M) \rightarrow SU(2)$ вытекает, что с точностью до калибровочной эквивалентности подпоследовательность $\mathcal{D}_n$ сходится к тривиальной связности d на $\eta|_K$. А теперь повторим доказательство леммы: нормируем u_n так, чтобы выполнялись соотношения $\int_K |u_n|^2 = 1$, и образуем слабый предел u , удовлетворяющий уравнению $d_- d_-^* u = 0$. Но $\eta|_{M_y}$ — тривиальное расслоение, поэтому, взяв базис плоских сечений, мы найдем, что u — антиавтодуальная ненулевая гармоническая 2-форма в $L^2(M_y) = L^2(M)$. Это противоречит положительной определенности формы пересечений ω .

Подчеркнем еще раз, что наша оценка собственного значения не зависит от $\lambda \leq \lambda_2$.

ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ

Введем теперь гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором мы будем решать уравнение (7.3)

$$\mathcal{L}u_t = \mathcal{D}\mathcal{D}^*u_t + \mathcal{D}^*u_t \# \mathcal{D}^*u_t = -tP_-F_A.$$

Наш выбор будет зависеть от связности D (и, следовательно, числа λ). Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}(D)$ как пополнение пространства гладких форм из $\Omega_-^2(\text{ad } \eta)|_{M_y}$ с компактными носителями относительно скалярного произведения

$$(7.17) \quad \{\Phi_1, \Phi_2\}_{\mathcal{H}(D)} = \int_{M_4} (\Phi_1, \Phi_2) + (\mathcal{D}^* \Phi_1, \mathcal{D}^* \Phi_2) + (\nabla \mathcal{D}^* \Phi_1, \nabla \mathcal{D}^* \Phi_2).$$

По существу, $\mathcal{H}(D)$ — это пространство H_2 -форм, которое, как показывают следующие его ценные свойства, специально приспособлено для нашего уравнения.

Предложение 7.18.

(i) $\mathcal{D}^*: \mathcal{H}(D) \rightarrow H_1(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^*M)$ — непрерывный оператор.

(ii) Для $\Phi \in \mathcal{H}(D)$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}^* \Phi\|_{L^4} \leq c_{16} \|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)}.$$

(iii) Отображение $\mathcal{L}: \mathcal{H}(D) \rightarrow L^2(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^*M)$ является гладким.

Доказательство. (i) Пусть $\Phi \in \mathcal{H}$; достаточно рассмотреть гладкие формы Φ с компактным носителем. Тогда

$$\|\mathcal{D}^* \Phi\|_{H_1} = \left(\int |\mathcal{D}^* \Phi|^2 + |\nabla \mathcal{D}^* \Phi|^2 \right)^{1/2} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)}.$$

Свойство (ii) непосредственно следует из (i) и неравенства Соболева (7.9). Свойство (iii) следует из (i) и того факта, что отображение $\text{mult}: H_1 \otimes H_1 \rightarrow L^2$ непрерывно (в силу теоремы вложения Соболева и неравенства Гёльдера).

Изучим линеаризованный оператор $L = \mathcal{D}\mathcal{D}^*$ при $t = 0$.

Теорема 7.19. Пусть D — почти автодуальная связность радиуса $\lambda \leq \lambda_2$. Тогда существует такая константа $c_{18} > 0$, что

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{18} \|L\Phi\|_{L^2}$$

и оператор $L: \mathcal{H}(D) \rightarrow L^2(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^*M)$ обратим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем обратимость оператора L в два этапа. Сначала мы получим неравенство, из которого будет следовать, что L инъективен и имеет замкнутый образ, а затем покажем, что его коядро пусто.

Как и прежде, будем рассматривать только гладкие формы $\Phi \in \mathcal{H}(D)$ с компактными носителями; для произвольных элементов $\Phi \in \mathcal{H}(D)$ требуемые неравенства получаются предельным переходом. К гладким формам с компактными носителями применимо интегрирование по частям. Используя эту операцию и оценку собственного значения из теоремы 7.16, находим, что

$$\begin{aligned} \alpha \int_{M_y} |\Phi|^2 &\leq \int_{M_y} |\mathcal{D}^* \Phi|^2 = \int_{M_y} (\mathcal{D} \mathcal{D}^* \Phi, \Phi) \leq \\ &\leq \left(\int_{M_y} |L\Phi|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{M_y} |\Phi|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки

$$(7.20) \quad \left(\int_{M_y} |\Phi|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\alpha} \|L\Phi\|_{L^2},$$

$$(7.21) \quad \left(\int_{M_y} |\mathcal{D}^* \Phi|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|L\Phi\|_{L^2}.$$

Чтобы оценить интеграл $\int_{M_y} |\nabla \mathcal{D}^* \Phi|^2$, применим формулу Вейтценбёка (6.25) к форме $\mathcal{D}^* \Phi$:

$$\begin{aligned} (7.22) \quad \int_{M_y} |\nabla \mathcal{D}^* \Phi|^2 &= \int_{M_y} (\nabla^* \nabla \mathcal{D}^* \Phi, \mathcal{D}^* \Phi) = \\ &= \int_{M_y} (2 \mathcal{D}^* \mathcal{D} \mathcal{D}^* \Phi + \mathcal{D} \mathcal{D}^* \mathcal{D}^* \Phi - \text{Ric}(\mathcal{D}^* \Phi) + 2(\mathcal{D}^* \Phi \lrcorner P_+ F), \mathcal{D}^* \Phi) \leq \\ &\leq 2 \int_{M_y} |L\Phi|^2 + \int_{M_y} |\mathcal{D}^* \mathcal{D}^* \Phi|^2 + \end{aligned}$$

$$+ (\|Ric\|_{L^\infty} + 2\|P_+ F\|_{L^\infty}) \int_{M_y} |\mathcal{D}^* \Phi|^2.$$

Но $D^* \mathcal{D}^* \Phi = -[P_- F \lrcorner \Phi]$, так что

$$(7.23) \quad \int_{M_y} |D^* \mathcal{D}^* \Phi|^2 \leq \|P_- F\|_{L^\infty} \int_{M_y} |\Phi|^2.$$

Член $\|Ric\|_{L^\infty}$ ограничен, так как он, по существу, постоянен на некомпактной части многообразия M_y , а члены $\|P_+ F\|_{L^\infty}$ и $\|P_- F\|_{L^\infty}$ ограничены в силу неравенств (7.8). (Именно здесь окупается раздутие — в метрике g имеем $\|P_+ F\|_{L^\infty} = O(\lambda^{-2})$ и наша оценка не выполняется.) Комбинируя неравенства (7.20) — (7.23), получаем

$$(7.24) \quad \left(\int_{M_y} |\nabla \mathcal{D}^* \Phi|^2 \right)^{1/2} \leq c_{19} \|L\Phi\|_{L^2}.$$

Наконец, складывая неравенства (7.20), (7.21) и (7.24), мы получаем оценку, утверждаемую теоремой.

Предположим теперь, что $\Phi \in \text{Coker } L$. Пусть $\beta_i \in C_0^\infty(M_y)$ — срезающие функции из предложения 7.9. К формам с компактными носителями можно дважды применить интегрирование по частям, поэтому с помощью формулы (6.29) получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M_y} (\Phi, L(\beta_i^2 \Phi)) = \int_{M_y} (\mathcal{D}^* \Phi, \mathcal{D}^*(\beta_i^2 \Phi)) = \\ &= \int_{M_y} \beta_i^2 |\mathcal{D}^* \Phi|^2 - \int_{M_y} 2\beta_i (\mathcal{D}^* \Phi, d\beta_i \lrcorner \Phi). \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Гёльдера следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\beta_i)} \beta_i^2 |\mathcal{D}^* \Phi|^2 &\leq \\ &\leq 2 \|d\beta_i\|_{L^\infty} \left(\int_{\text{supp}(\beta_i)} \beta_i^2 |\mathcal{D}^* \Phi|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\text{supp}(d\beta_i)} |\Phi|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$(7.25) \quad \left(\int_{\text{supp}(\beta_i)} \beta_i^2 |\mathcal{D}^* \Phi|^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq 2 \|d\beta_i\|_{L^\infty} \left(\int_{\text{supp}(d\beta_i)} |\Phi|^2 \right)^{1/2}.$$

Но $\text{supp}(d\beta_i) \subseteq \{i-1 \leq \tau \leq i\}$ и $\Phi \in L^2$.
Следовательно, при $i \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (7.25) стремится к нулю. Таким образом, $\|\mathcal{D}^* \Phi\|_{L^2} = 0$, и из оценки собственного значения (теорема 7.16) мы выводим, что $\Phi = 0$.
Значит, $\text{Coker } L = \{0\}$ и оператор L обратим.

Теорема 7.19 обобщается на линейные операторы типа (7.4), появляющиеся при изучении привитых связностей.

Т е о р е м а 7.26. Предположим, что $B \in L^4(\text{ad } \eta \otimes T^*M)$
и $L_B = L + B \neq \mathcal{D}^*$. Тогда существует такое $\delta > 0$,
что если $\|B\|_{L^4} < \delta$ и D — почти автодуальная
связность радиуса $\lambda \leq \lambda_2$, то

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{18} \|L_B \Phi\|_{L^2}$$

и оператор $L_B: \mathcal{H}(D) \rightarrow L^2(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^*M)$ обратим.

В применении к привитым связностям (7.4) имеем $B = 2\mathcal{D}^*u_t$
и $L_B \Phi = \mathcal{D}\mathcal{D}^* \Phi + 2\mathcal{D}^*u_t \# \mathcal{D}^* \Phi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для гладкой формы Φ с компактным носителем

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{18} \|L\Phi\|_{L^2} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_{18} (\|L_B \Phi\|_{L^2} + \|B \# \mathcal{D}^* \Phi\|_{L^2}) \leq \\
&\leq c_{18} (\|L_B \Phi\|_{L^2} + \|B\|_{L^4} \|\mathcal{D}^* \Phi\|_{L^4}) \leq \\
&\leq c_{18} (\|L_B \Phi\|_{L^2} + \delta c_{16} \|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)})
\end{aligned}$$

в силу предложения 7.18. Полагая $\delta = 1/(2c_{16}c_{18})$, получаем требуемое неравенство. Следовательно, как и прежде, оператор L_B инъективен и имеет замкнутый образ.

Для исследования ядра оператора L_B мы воспользуемся соображениями непрерывности. Множество $J = \{t \in [0, 1]: L_{tB} \text{ обратим}\}$ непусто и открыто (поскольку обратимость является открытым свойством). Чтобы доказать замкнутость множества J , фиксируем сечение $\xi \in L^2(\text{ad } \eta \otimes \Lambda_-^2 T^*M)$, числовую последовательность $t_n \rightarrow t_0$ и предположим, что $L_{t_n} \Phi_n = \xi$. Тогда только что доказанное неравенство дает равномерную оценку

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}(D)} \leq 2c_{18} \|\xi\|_{L^2}.$$

Таким образом, переходя к подпоследовательности, мы получаем слабый предел $\Phi_n \rightharpoonup \Phi_0$. Поскольку линейные уравнения сохраняются при переходе к слабым пределам, то $L_{t_0 B} \Phi_0 = \xi$ и оператор $L_{t_0 B}$ сюръективен. Но предыдущие рассуждения показывают, что $L_{t_0 B}$ инъективен. Следовательно, $L_{t_0 B}$ обратим, множество J замкнуто и, значит, оператор L_B обратим.

ПРОЕКЦИЯ ТАУБСА

Итак, мы имеем все необходимое, чтобы получить автодуальные связности.

Т е о р е м а 7.27. Существует такое число $\lambda_3 > 0$, что если D — почти автодуальная связность радиуса $\lambda \leq \lambda_3$,

то $D + \mathcal{D}^*u$ для некоторого $u \in \mathcal{H}(D)$ является авто-
дуальной связностью на проколоте многообразии M_y . Сечение
 u удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{\mathcal{H}(D)} \leq 2c_{18} \|P_- F_D\|_{L^2}.$$

Наконец, $D + \mathcal{D}^*u$ продолжается до связности на всем много-
образии M .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как говорилось во введении к этой главе, мы применяем метод непрерывности к уравнению

$$(7.28) \quad \mathcal{E}_t: \mathcal{L}_t u_t = \mathcal{D}\mathcal{D}^*u_t + \mathcal{D}^*u_t \# \mathcal{D}^*u_t = -tP_- F_D$$

с дополнительным условием

$$(7.29) \quad \|u_t\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{20} \lambda_3,$$

где $c_{20} = 2c_{15}c_{18}$, а значение λ_3 предстоит выбрать. Открытость в точке t непосредственно вытекает из теоремы 7.26, в которой нужно положить $B = 2\mathcal{D}^*u_t$. Так как

$$\|2\mathcal{D}^*u_t\|_{L^4} \leq 2c_{16} \|u_t\|_{\mathcal{H}(D)} \leq 2c_{16}c_{20}\lambda_3,$$

то, взяв $\lambda_3 = \min(\lambda_2, \delta/(2c_{16}c_{20}))$, мы видим, что условие теоремы 7.26 выполняется для всех $\lambda \leq \lambda_3$.

Чтобы доказать замкнутость в точке t , воспользуемся априорной оценкой из теоремы 7.26:

$$\|u_t\|_{\mathcal{H}(D)} \leq 2c_{18} \|-tP_- F_D\|_{L^2} \leq 2c_{15}c_{18}\lambda_3 = c_{20}\lambda_3.$$

Стало быть, если $t_n \rightarrow t_0$ и сечения u_n удовлетворяют уравнениям $\mathcal{E}_{t_n}$, то в $\mathcal{H}(D)$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $u_n \rightharpoonup u_0$. Теперь мы должны проверить, что предельное сечение u_0 является решением уравнения $\mathcal{E}_t$ и что для него выполняется дополнительное условие (7.29). Прежде всего, так как нормы непрерывны снизу в слабой топологии, то

$$\|u_0\|_{\mathcal{H}(D)} \leq \lim \|u_n\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{20} \lambda_3,$$

т.е. условие (7.29) выполнено. Линейный член $\mathcal{D}\mathcal{D}^*$ из уравнения (7.28) сохраняется при переходе к слабым пределам, и, значит,

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* u_n \rightarrow \mathcal{D}\mathcal{D}^* u_0.$$

Чтобы исследовать нелинейный член, будем работать с компактными подмножествами. Нам остается доказать лишь, что u_0 является решением уравнения $\mathcal{E}_{t_0}$; очевидно, что это локальная задача. Общая теорема вложения Соболева (6.32) вместе с предложением 7.18 дает сильно сходящуюся подпоследовательность $\mathcal{D}^* u_n \rightarrow \mathcal{D}^* u_0$ в $L^{4-\varepsilon}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Применяя неравенство Гёльдера, находим, что $\mathcal{D}^* u_n \# \mathcal{D}^* u_n \rightarrow \mathcal{D}^* u_0 \# \mathcal{D}^* u_0$ в $L^{2-\varepsilon/2}$. Поэтому уравнение сохраняется при переходе к пределу.

Искомое решение u при $t = 1$ доставляет нам метод непрерывности. Эллиптическая регулярность (6.37) гарантирует, что решение u является гладким в некоторой калибровке. Наконец, теорема об устранении особенности 6.42 показывает, что u продолжается до автодуальной связности на всем многообразии M . Теперь мы должны показать, что полученная связность обитает в расслоении с топологическим зарядом $k = 1$ (см. обсуждение, следующее за теоремой 6.42). Для любого $\Phi \in \mathcal{H}(D)$ обозначим через $F(\Phi)$ кривизну связности $D + \mathcal{D}^* \Phi$. Из предложения 7.18 без труда следует, что функция $k: \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{Z}$, задаваемая формулой

$$k(\Phi) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} \text{tr}(F(\Phi) \wedge F(\Phi)),$$

непрерывна. Таким образом, $k(\Phi)$ — константа, и, поскольку $k(0) = 1$, мы заключаем, что $D + \mathcal{D}^* u$ представляет собой связность в расслоении с $k = 1$.

В сочетании с процедурой прививки из гл. 6 теорема 7.27 утверждает существование на многообразии M нетривиальных автодуальных связностей. В гл. 9 это приведет к конструкции воротника. Воротник является подмножеством в $\mathcal{M}$ и состоит из орбит автодуальных связностей, но, как правило, мы будем выбирать конкретную калибровку и рассматривать точки воротника как автодуальные связности. В гл. 9 нам понадобится свойство локальной связности этого воротника, означающее, что две близлежащие автодуальные связности с пространственно локализованными кривизнами можно соединить кривой, состоящей из автодуальных связностей. Поскольку доказательство свойства локальной связности основано на идеях и технике этой главы, естественно привести его здесь.

Т е о р е м а 7.30. Пусть D и D' — почти автодуальные связности радиуса $\lambda \leq \lambda_3$. Предположим, что $D' = D + A$, где

$$\|A\|_{L^4} \leq \frac{\delta}{4\sqrt{1+c_{16}c_{18}}}.$$

Тогда существует такое гладкое семейство автодуальных связностей

$$D_t = D + tA + \mathcal{D}^*u_t,$$

что $D_0 = D$ и $D_1 = D'$. Кроме того, кривизны $F_t = F_{D_t}$ этого семейства удовлетворяют неравенству

$$\|F_t - F\|_{L^2} \leq t\|F' - F\|_{L^2} + \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод непрерывности к уравнению

$$P_- F_{D_t} = 0.$$

Учитывая тот факт, что связность $D + A$ автодуальна, это уравнение можно переписать в виде

$$(7.31) \quad \mathcal{D}\mathcal{D}^*u_t + (2tA + \mathcal{D}^*u_t) \# \mathcal{D}^*u_t = (t - t^2)A \# A.$$

Введем, кроме того, дополнительное условие

$$(7.32) \quad \|u_t\|_{\mathcal{H}(\mathcal{D})} \leq \frac{\delta}{2c_{16}}.$$

Далее доказательство продолжается точно так же, как в теореме 7.27, только на сей раз в уравнении

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^*u_t + (B \# \mathcal{D}^*)u_t = (t - t^2)A \# A$$

мы имеем $B = 2tA + \mathcal{D}^*u_t$. Нам нужно показать лишь, что $u_1 = 0$. Предположим, что u_t и $\tilde{u}_t$ — решения уравнения (7.31), подчиняющиеся условию (7.32). Тогда

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D}(u_t - \tilde{u}_t) + (2tA + \mathcal{D}^*(u_t - \tilde{u}_t)) \# \mathcal{D}^*(u_t - \tilde{u}_t) = 0.$$

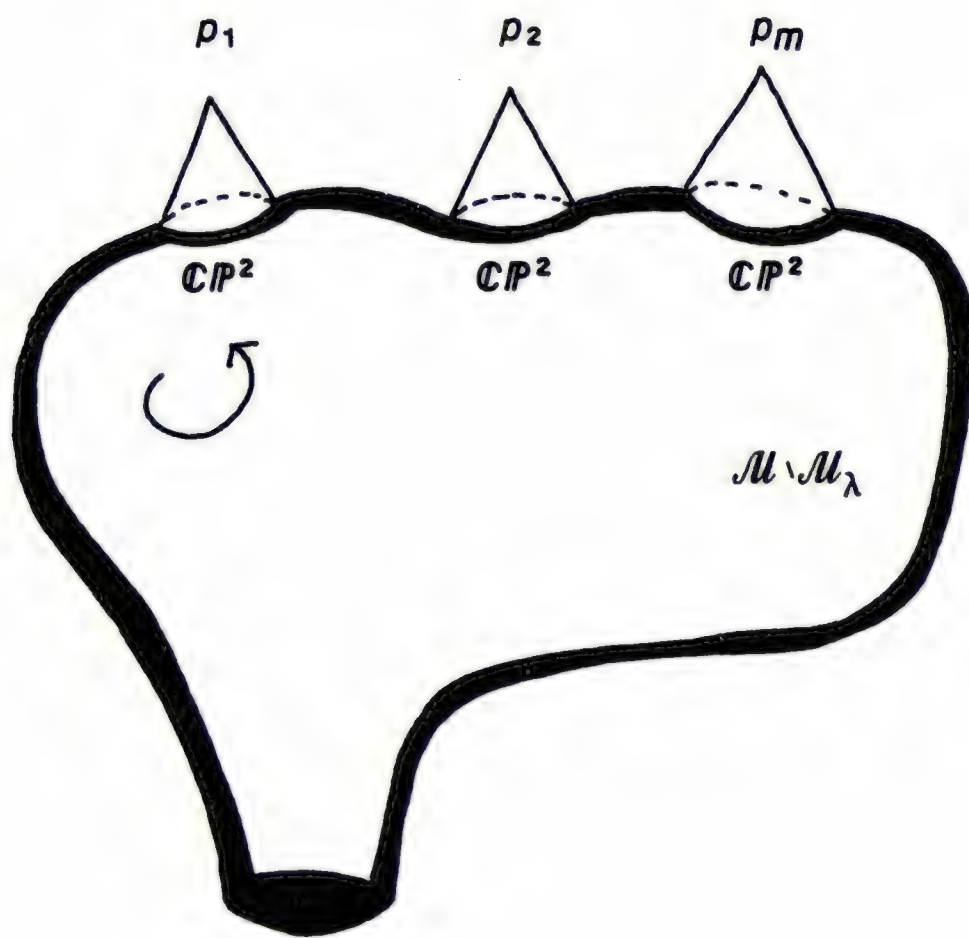
По теореме 7.26 $\|u_t - \tilde{u}_t\|_{\mathcal{H}(\mathcal{D})} = 0$, так что $u_t = \tilde{u}_t$. Единственность при $t = 1$ показывает, что $u_1 = 0$. Теперь оценка кривизны без труда следует из выражения

$$F_t = (1 - t)F_0 + tF_1 + (t^2 - t)(A \wedge A) + \mathcal{D}\mathcal{D}^*u_t + \\ + (2tA - \mathcal{D}^*u_t) \wedge \mathcal{D}^*u_t.$$

Глава 8

КОМПАКТНОСТЬ

Решающую роль в доказательстве теоремы Дональдсона играет инвариантность сигнатуры относительно ориентированного кобордизма. Но говорить об инвариантности сигнатуры можно лишь тогда, когда задающая этот кобордизм «пленка» является компактной. В этой главе будет доказана компактность многообразия $\overline{\mathcal{M}}$, определяющего кобордизм $M \sim \bigsqcup_m \mathbb{C}P^2$.



На самом деле мы установим здесь компактность только усеченного варианта $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_\lambda$ нашего пространства модулей. Однако в гл. 9 мы отождествим конец многообразия $\mathcal{M}$ с произведением $(0, \lambda) \times M$, откуда будет следовать компактность $\overline{\mathcal{M}}$. Необходимые для этого предварительные результаты будут получены

здесь с помощью так называемых теорем компактности и регулярности.

Напомним, что точками пространства модулей являются орбиты решений автодуальных уравнений Янга – Миллса. Обычно теоремы компактности для решений нелинейных эллиптических задач получаются непосредственно из слабой компактности соболевских пространств, но в нашей ситуации наличие калибровочной симметрии требует привлечения дополнительных аргументов. Мы начнем с определения канонических локальных калибровок для связностей с малыми кривизнами. Из существования таких калибровок, называемых калибровками Кулона, немедленно следует теорема регулярности для автодуальных связностей. Используемые здесь методы можно применить в весьма общей ситуации для доказательства внутренней регулярности эллиптических уравнений, поэтому мы излагаем их во всех подробностях. Глобальная компактность получается склеиванием локальных результатов. Техника склеивания и доказательство существования калибровок Кулона изложены в работе [U1], и мы не будем воспроизводить их здесь.

Воротник в $\mathcal{M}$ состоит из орбит тех связностей, кривизны которых локализованы в шарах малого радиуса вокруг точек многообразия M . Действительно, конструкция Таубса доставляет как раз такие связности. Теперь мы должны выполнить обратную процедуру. А именно, для данной связности с кривизной, локализованной в окрестности точки, мы определяем ее центр и масштаб. Важную роль при этом играют явные выражения для инстантонов на S^4 (гл. 6). Мы показываем, что каждый локализованный инстантон на M «близок» к одному из таких модельных инстантонов, и, пользуясь этой близостью, измеряем его центр и масштаб. Оказывается, можно измерять только достаточно локализованные связности; они-то и составляют воротник многообразия $\mathcal{M}$. Глава завершается основной теоремой, утверждающей, что для каждого $\lambda > 0$ подмножество $\mathcal{M}$, состоящее из связностей, масштаб которых не меньше λ , компактно.

В доказательствах используются технические средства, заимствованные из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Заботясь о читателях, которые не являются специалистами в этой области, мы подробно описываем всю необходимую аналитическую технику.

КОМПАКТНОСТЬ И РЕГУЛЯРНОСТЬ

В литературе встречаются два типа теорем компактности. Теоремы первого типа утверждают, что множество $\{\bar{D}: \int |F_{\bar{D}}|^{2+\varepsilon} \leq B\}$ слабо компактно в пространстве $L_1^{2+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ (см. [U1]). (Как обычно, черта над связностью означает ее орбиту относительно группы калибровочных преобразований. Напомним, что функция $D \mapsto |F_D|$ калибровочно инвариантна. Кроме того, напомним, что всякий раз, когда это не приводит к недоразумениям, мы не пишем в интегралах форму объема.) Так как функции из $L_1^{2+\varepsilon}$ непрерывны, слабые $L_1^{2+\varepsilon}$ -пределы в размерности 4 сохраняют топологический тип подстилающего расслоения. В своей диссертации [Se] Седлачек показал, что множество $\{\bar{D}: \int |F_{\bar{D}}|^2 \leq B\}$ также «слабо» компактно, однако в этом случае могут измениться топологические свойства расслоений: слабый предел связностей с топологическим зарядом $k = 1$ может иметь заряд $k = 0$. Хотя ни один из этих результатов не относится непосредственно к автодуальным связностям, оба они наводят на мысль, что для последовательности связностей из пространства модулей либо существует сходящаяся подпоследовательность, либо кривизна локализуется в окрестности точки. В этом состоит теорема 8.36, относящаяся ко второму типу теорем компактности.

Мы начнем с леммы о локальной калибровке. Пусть $\xi \rightarrow B_1$ есть (тривиальное) $SU(2)$ -расслоение над единичным шаром B_1 в четырехмерном евклидовом пространстве. Любая связность D в ξ может быть записана в виде $D = \alpha + A_\varepsilon$, как только мы выберем тривиализацию $\mathfrak{b}$. Ограничим выбор $\mathfrak{b}$ требованием, чтобы действие

$$(8.1) \quad \mathcal{E}(\mathfrak{b}) = \int_{B_1} |A_\varepsilon|^2$$

было минимальным. Уравнение Эйлера – Лагранжа для действия $\mathcal{E}(\mathfrak{b})$ имеет вид

$$d^* A_\epsilon = 0,$$

$$*A_\epsilon|_{S^3} = 0,$$

где последнее условие означает, что нормальные компоненты формы A_ϵ обращаются в нуль на границе шара. К сожалению, калибровки, полученные непосредственной минимизацией функционала (8.1), могут иметь особенности. Однако все неприятности исчезают, если ограничиться связностями с малыми кривизнами.

Л е м м а 8.2 [U1, теорема 2.1]. Предположим, что кривизна F_D связности D удовлетворяет условию $\|F_D\|_{L^2} < \epsilon_3$ для достаточно малого $\epsilon_3 > 0$. Тогда существует такая L^2 -калибровка $\mathfrak{b}$, что D может быть представлена в виде $D = d + A_\epsilon$, причем

$$(i) \quad d^* A_\epsilon = 0,$$

$$(ii) \quad *A_\epsilon|_{S^3} = 0,$$

$$(iii) \quad \|A_\epsilon\|_{L^2_1} \leq c_{21} \|F_D\|_{L^2}.$$

Более того, калибровка $\mathfrak{b}$ и форма A_ϵ единственны с точностью до калибровочной эквивалентности.

Здесь L^2 -норма калибровочных преобразований вычисляется с помощью вложения $SU(2) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(2)$, а L^p -нормы сечений векторных расслоений определены формулой (6.31). Доказательство леммы строится так: устанавливается, что множество $\{D: \|F_D\|_{L^2} < \epsilon_3\}$ связно, а множество тех D , которые удовлетворяют условиям (i) – (iii), одновременно открыто и замкнуто. Открытость следует из теоремы о неявной функции (в этом месте фиксируется значение ϵ_3), а замкнутость вытекает из соображений компактности, подобных тем, ко-

торые использовались в гл. 7. Полное доказательство леммы можно найти в работе [U1]. Отметим, что лемма 8.2 справедлива для шара любого радиуса, поскольку норма $\|F_D\|_{L^2}$ конформно инвариантна.

Теперь мы в состоянии вывести свойство регулярности для автодуальных связностей.

Предложение 8.3. Пусть D — связность на единичном шаре B_1 , автодуальная относительно метрики g и удовлетворяющая условию $\|F_D\|_{L^2} < \varepsilon_3$. Тогда существует такая L^2 -калибровка α , что D может быть представлена в виде $D = \alpha + A_\varepsilon$, причем форма A_ε бесконечно дифференцируема в шаре $B_{1/2}$ половинного радиуса и подчинена оценке

$$\|A_\varepsilon\|_{C^k(B_{1/2})} \leq c_{22}(k) \|F_D\|_{L^2(B_1)}.$$

В частности,

$$\max_{|x| \leq 1/2} |F_D| \leq c_{22}(1) \|F_D\|_{L^2(B_1)}.$$

Разумеется, в этом предложении можно заменить шар $B_{1/2}$ любым компактным множеством $O \Subset B_1$, но тогда константа $c_{22}(k)$ будет зависеть от расстояния $\rho = \text{dist}(O, \partial B_1)$ и неограниченно возрастать при $\rho \rightarrow 0$. Заметим также, что указанные оценки равномерны по всем метрикам, лежащим в малой C^k -окрестности фиксированной метрики g .

Из предложения 8.3 немедленно следует локальная регулярность для автодуальных связностей D на многообразии M . В самом деле, поскольку $\int_M |F_D|^2 < \infty$, каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью O_x , в которой почти постоянна исходная метрика и выполняется неравенство $\int_{O_x} |F_D|^2 < \varepsilon_3/2$. Раздуем окрестность O_x так, чтобы она содержала шар B_1 . Так как L^2 -норма 2-форм конформно инвариантна, а метрика раздутого многообразия в нормальных координатах конформно близка евклидовой метрике δ , то применима лемма 8.2. Получающаяся форма $A_{\varepsilon(O_x)}$ гладка в силу предложения 8.3. Заметим, однако, что размеры окрестностей O_x не являются

равномерно ограниченными, и поэтому оценки из предложения 8.3 не равномерны на M .

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 8.3. Выберем калибровку $\tilde{b}$ так, как в лемме 8.2, и опустим для краткости индекс $\tilde{b}$ в обозначении для формы $A_{\tilde{b}}$. Тогда из этой леммы и соображений автодуальности вытекает, что форма $A \in L^2_1$ удовлетворяет уравнениям

$$d^*A = 0,$$

$$d_-A + A \# A = 0.$$

Здесь $d_- = P_-d$, причем антиавтодуальная проекция P_- берется относительно метрики g , в то время как сопряженный оператор d^* — относительно метрики δ . Таким образом, A удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(8.4) \quad (dd^* + d_-^*d_-)A + d_-^*(A \# A) = 0,$$

где на сей раз сопряженный оператор d_-^* берется относительно метрики g . Оператор $L = dd^* + d_-^*d_-$ является эллиптическим, несмотря на то, что сопряжения относятся к разным метрикам. Вместо того чтобы возиться со стандартными граничными условиями на A , мы предпочли воспользоваться срезающей функцией с компактным носителем $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$, с помощью которой получим нужные нам оценки. Используя схематическое обозначение ∇A для производных A и $Q(\cdot, \cdot)$ для квадратичных членов, мы получаем из (8.4) уравнение

$$(8.5) \quad (L + \mu)(\varphi A) + Q(A, \nabla(\varphi A)) = \\ = c_{23}(\varphi)A + c_{24}(\varphi)\nabla A + c_{25}(\varphi)Q(A, A) + \mu(\varphi A),$$

верное при любых $\mu \in \mathbb{R}$. Функции c_{23} , c_{24} и c_{25} в этом уравнении зависят от φ и ее производных. Так как L — неотрицательный эллиптический оператор, то $L + \mu$ обратим в соболевских пространствах при $\mu > 0$. Более подробно, обозначим через $L^p_{1,0}$ замыкание пространства C_0^∞ в L^p_1 и

через $L_{k,0}^p = L_k^p \cap L_{1,0}^p$ — подпространство L_k^p -потенциалов, которые обращаются в нуль на ∂B_1 . (Элементы, лежащие в замыкании C_0^∞ в L_k^p , также имеют нулевые производные на границе шара.) Тогда оператор $L + \mu: L_{k,0}^p \rightarrow L_{k-2}^p$ обратим. Более того, поскольку умножения

$$L^2 \otimes L_1^2 \rightarrow L_{-1}^2, \quad L_1^2 \otimes L_1^2 \rightarrow L^2$$

непрерывны в размерности 4 (см. теорему 6.34), мы можем рассматривать член первого порядка $Q(A, \nabla(\varphi(A)))$ в уравнении (8.5) как ограниченный линейный оператор

$$Q(A, \nabla(\cdot)): L_{1,0}^2 \rightarrow L_{-1}^2,$$

или

$$Q(A, \nabla(\cdot)): L_{2,0}^2 \rightarrow L^2.$$

В обоих случаях его операторная норма ограничена с точностью до константы нормой $\|A\|_{L^2}$, которая по лемме 8.2 мала. Следовательно, исправляя, если понадобится, константу ε_3 , мы видим, что $Q(A, \nabla(\cdot))$ является малым возмущением $L + \mu$ и оператор $\tilde{L} = L + \mu + Q$ обратим. Далее, из непрерывности умножения $L_1^2 \otimes L_1^2 \rightarrow L^2$ вытекает, что правая часть уравнения (8.5) лежит в L^2 . Поэтому в силу обратимости оператора $\tilde{L}: L_{2,0}^2 \rightarrow L^2$ существует единственный элемент $\tilde{A} \in L_{2,0}^2$, для которого

$$(8.6) \quad \tilde{L}(\tilde{A}) = \text{RHS},$$

где через RHS мы для краткости обозначили правую часть уравнения (8.5). Но, взяв $\tilde{A} \in L_{1,0}^2$, мы видим, что соотношение (8.6) выполняется для $\text{RHS} \in L_{-1}^2$. Таким образом, из обратимости оператора $\tilde{L}: L_{1,0}^2 \rightarrow L_{-1}^2$ и того факта, что φA удовлетворяет уравнению (8.5), следует, что $\varphi A = \tilde{A} \in L_{2,0}^2$, откуда $A \in L_2^2(U)$ для любого компактно вложенного множества $U \Subset \text{supp } \varphi$. Выберем срезающую функцию φ_2 так, чтобы $\text{supp } \varphi_2 \Subset \text{supp } \varphi$, и перепишем уравнение (8.5) в виде

$$(8.7) \quad (L + \mu)(\varphi_2 A) = c_{23}(\varphi_2)A + c_{24}(\varphi_2)\nabla A + \\ + \varphi_2 Q(A, \nabla A) + \mu(\varphi_2 A).$$

Рассмотрим область U_2 , удовлетворяющую условиям $\text{supp } \varphi_2 \Subset U_2 \Subset \text{supp } \varphi$. Нам хотелось бы, чтобы правая часть уравнения (8.7) содержалась в пространстве $L^2_1(U_2)$. К сожалению, несмотря на то, что $L^2_2 \hookrightarrow L^4_1$, пространство L^4_1 не вкладывается в L^∞ и, значит, $L^2_2 \otimes L^2_1 \not\hookrightarrow L^2_1$ (это исключение в теореме вложения Соболева). Однако $Q(A, \nabla A) \in L^{2-\varepsilon}_1$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому из обратимости оператора $L + \mu: L^{2-\varepsilon}_{3,0} \rightarrow L^{2-\varepsilon}_1$ следует, что $A \in L^{2-\varepsilon}_3(U'_2)$ для $U'_2 \Subset \text{supp } \varphi_2$. Но тогда $Q(A, \nabla A) \in L^2_1(U'_2)$. Повторяя эти рассуждения с использованием уравнения (8.7), мы получаем, что на k -м шаге $A \in L^2_k(U_k)$. Эта итерационная процедура имеет смысл благодаря наличию непрерывного умножения $L^2_k \otimes L^2_{k-1} \rightarrow L^2_{k-1}$, $k > 2$. Оценка нормы $\|A\|_{C^k(B_{1/2})}$ следует теперь из соболевского вложения $L^2_{k+3} \hookrightarrow C^k(B_{1/2})$. Константы $c_{22}(k)$ зависят от $\|L + \mu\|^{-1}_{k+3}$ (и, значит, от g), c_{21} , $\|\varphi_j\|_{C^j}$ ($j \leq k$) и ε_3 . Если мы ищем оценки для произвольной области $O \Subset B_1$, то зависимость $c_{22}(k)$ от $\|\varphi_j\|_{C^j}$ позволяет выразить $c_{22}(k)$ через $\text{dist}(O, \partial B_1)$. Наконец, оценка на $\max |F_D|$ следует из C^1 -оценки формы A .

Доказанное свойство регулярности, теорема Арцела – Асколи и техника склеиваний дают глобальный результат для компактных областей $\Omega \Subset M$.

Т е о р е м а 8.8. Пусть D_j – последовательность связностей на Ω , автодуальных относительно метрик g_j , причем $g_j \rightarrow g$ в $C^{k+1}(\Omega)$. Предположим, что либо

$$\max_{\Omega} |F_{D_j}| \leq B,$$

либо

$$\|F_{\bar{D}_j}\|_{L^2} < \varepsilon_3/2.$$

Тогда для любого $d > 0$ существуют такая подпоследовательность $\{j'\} \subseteq \{j\}$ и такие калибровочные преобразования $\mathfrak{z}_{j'}$, что $\mathfrak{z}_{j'}^*(D_{j'}) \rightarrow D$ в $C^k(\Omega_d)$ для некоторой связности D , автодуальной относительно метрики g .

Здесь $\Omega_d = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq d\} \Subset \Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении любого из двух условий на $F_{\bar{D}_j}$ мы можем покрыть Ω_d конечным числом таких геодезических шаров $\{B_\rho(x_\alpha)\}$, что $B_{2\rho}(x_\alpha) \subset \Omega$, $\|F_{D_j}\|_{L^2(B_{2\rho}(x_\alpha))} \leq \varepsilon_3/2$ и метрика на $B_{2\rho}(x_\alpha)$ близка в пространстве C^{k+1} к евклидовой метрике δ . Так как L^2 -оценки кривизны инвариантны относительно растяжений, то, применяя предложение 8.3, мы получаем такие калибровочные преобразования $\mathfrak{z}_{j,\alpha}$, непрерывные в норме L^2 , что $\mathfrak{z}_{j,\alpha}^*(D_j) = d + A_{j,\alpha}$ в $B_{2\rho}(x_\alpha)$, причем $A_{j,\alpha} \in C^{k+1}(B_\rho(x_\alpha))$. Поскольку последовательность метрик g_j сходится в C^{k+1} , нормы $\|A_{j,\alpha}\|_{C^{k+1}(B_\rho(x_\alpha))}$ равномерно ограничены для больших j . Стало быть, в силу компактности вложения $C^{k+1} \hookrightarrow C^k$, мы можем выделить подпоследовательность $A_{j',\alpha}$, сходящуюся в $C^k(B_\rho(x_\alpha))$ для каждого α . Теперь мы должны сравнить различные локальные калибровки $\mathfrak{z}_{j',\alpha}$ и определить предельное расслоение. Это делается с помощью техники склеиваний, основным элементом которой является контроль за функциями перехода

$$h_{j,\alpha,\beta} = \mathfrak{z}_{j,\alpha} \circ \mathfrak{z}_{j,\beta}^{-1}: B_\rho(x_\alpha) \cap B_\rho(x_\beta) \rightarrow SU(2),$$

осуществляемый (как и в (3.3)) посредством уравнения

$$dh_{j,\alpha,\beta} = A_{j,\alpha} h_{j,\alpha,\beta} - h_{j,\alpha,\beta} A_{j,\beta}.$$

Подробности и, в частности, тот факт, что топологический тип расслоения сохраняется при переходе к пределу, можно найти в работе [U1, § 3]. (Заметим, что по сравнению с [U1] рассуждения в нашем случае несколько упрощаются, так как мы исполь-

зуем сильную C^k -сходимость, а не слабую сходимость в пространствах Соболева.) Некоторые простые примеры такого склеивания встретятся в гл. 9. Наконец, автодуальные уравнения сохраняются при переходе к сильным пределам. Следовательно, предельная связность автодуальна относительно предельной метрики g .

Научившись в следующем разделе измерять локализованную кривизну, мы применим теорему 8.8 к выводу свойств компактности пространства $\mathcal{M}$.

ИЗМЕРЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ КРИВИЗНЫ

В гл. 6 мы установили, что инстантоны на сфере S^4 с топологическим зарядом $k = 1$ описываются двумя параметрами: центром $b \in S^4$ и масштабом $\lambda > 0$. С геометрической точки зрения λ — это радиус шара с центром в b (в стереографических координатах), который содержит половину действия:

$$(8.9) \quad \int_{B_\lambda(b)} |F_{\lambda, b}|^2 = 4\pi^2.$$

В конце концов мы будем сравнивать автодуальные связности на M , имеющие локализованные кривизны, с инстантонами на S^4 . Поэтому в этом разделе мы определим для таких связностей центр и масштаб. Наша конструкция подобна той, которая неявно присутствует в формуле (8.9), только теперь мы интегрируем в нормальных координатах и используем вместо характеристической функции шара $B_\lambda(b)$ сглаживатель Фридрихса.

Начнем с изучения неотрицательных мер в шаре. Мы будем представлять себе эти меры как квадраты норм кривизны (напряженности поля) связностей на M , умноженные на форму объема, или, эквивалентно, как $-\text{tr}(F \wedge * F)$. Хотя мы рассматриваем шар B_2 , но, чтобы все наши определения имели смысл, наши меры определены в большем шаре B_4 . Все наши величины гладко зависят от некоторой C^k -метрики g , и измерения производятся в этой метрике. Позже мы ограничимся метриками g , близкими к евклидовой метрике δ . Положим

$$(8.10) \quad \mathcal{F} = \left\{ \omega \in L^1(B_4; \Lambda^4 \mathbb{R}^4) : \omega \geq 0, \int_{B_4} \omega \leq 8\pi^2, \int_{B_2} \omega \geq 4\pi^2 \right\}$$

и обозначим через $\mathcal{C}_k$ множество C^k -метрик на B_4 . Пусть β — гладкая неотрицательная срезающая функция, удовлетворяющая условиям

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \beta(\rho) &= \begin{cases} 1, & \rho < 1 - \delta, \\ 0, & \rho \geq 1, \end{cases} \\ \beta'(\rho) &\leq 0, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ — фиксированное малое число. Определим гладкую функцию

$$R: (0, 2) \times B_2 \times \mathcal{F} \times \mathcal{C}_k \rightarrow \mathbb{R},$$

полагая

$$(8.12) \quad R(\lambda, x, \omega, g) = \int_{B_4} \beta\left(\frac{\rho_g(x, z)}{\lambda}\right) \omega(z).$$

Здесь ρ_g — функция расстояния, определенная метрикой g . Срезающая функция, точный вид которой мы определим позже, позволяет вычислить производные функции R через производные β . Следовательно, свойства R будут зависеть только от формы $\omega \in L^1(B_4; \Lambda^4 \mathbb{R}^4)$.

Начнем с того, что для каждой фиксированной точки $x \in B_2$ определим число $\lambda(x, \omega, g)$ как радиус шара с центром x , интеграл по которому равен половине исходного интеграла.

Л е м м а 8.13. $\partial R / \partial \lambda > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda}(\lambda, x, \omega, g) = - \int_{B_2} \frac{\rho_g(x, z)}{\lambda^2} \beta'\left(\frac{\rho_g(x, z)}{\lambda}\right) \omega(z) \quad \text{и} \quad \beta' \leq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции радиус $\lambda(x, \omega, g)$ в

$$(8.14) \quad R(\lambda(x, \omega, g), x, \omega, g) = 4\pi^2$$

корректно определен (наше условие на интеграл гарантирует, что значение $4\pi^2$ достигается для некоторой точки $x \in B_2$). Заметим, что соответствие $\omega \mapsto \lambda(x, \omega, g)$ является гладким.

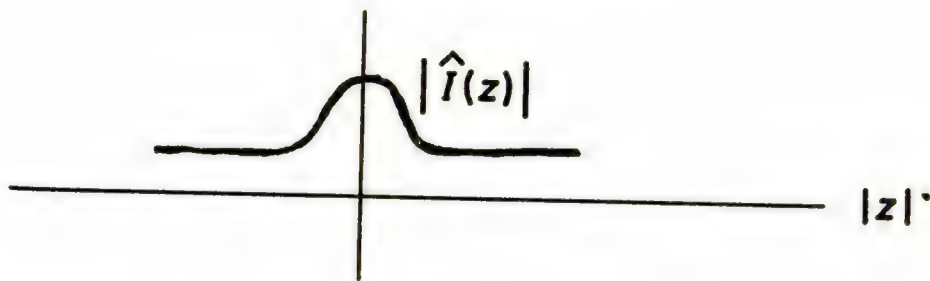
Назовем масштабом (или шириной) формы ω число

$$(8.15) \quad \lambda(\omega, g) = \min_{x \in B_2} \lambda(x, \omega, g).$$

Это число определено для всех $\omega \in \mathcal{F}$. Естественно было бы назвать центром ω ту точку $x \in B_2$, в которой $\lambda(x, \omega, g)$ достигает минимума, однако такая точка может оказаться не единственной. Чтобы получить единственный минимум, нам придется ограничиться локализованными связностями f и метриками g , близкими к евклидовой метрике δ . В качестве подготовительного шага исследуем нашу модель: основной инстантон I в евклидовом пространстве.

Напряженность поля инстантона I , которую мы рассматриваем как 4-форму, вычисляется с помощью соотношений (6.2), (6.6) и имеет вид

$$(8.16) \quad \hat{I}(z) = \frac{48 dz}{(1 + |z|^2)^4}.$$



Исключая срезающую функцию и фиксируя евклидову метрику δ , положим

$$(8.17) \quad \hat{R}(\lambda, x) = \int_{B_\lambda(x)} \hat{I}(z)$$

и определим $\hat{\lambda}(x)$ как неявную функцию (8.14). Очевидно, что $\hat{\lambda}$ достигает минимума в точке 0; нетрудно вычислить, что $\hat{\lambda}(0) = 1$. То, что это единственный минимум, вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 8.18. (i) Гессиан $d_x^2 \hat{\lambda} > 0$ в некотором
шаре $B_{\varepsilon_4}(0)$.
 (ii) $\hat{\lambda} - 1 > c_{26} > 0$ на $B_2 \setminus B_{\varepsilon_4}$.

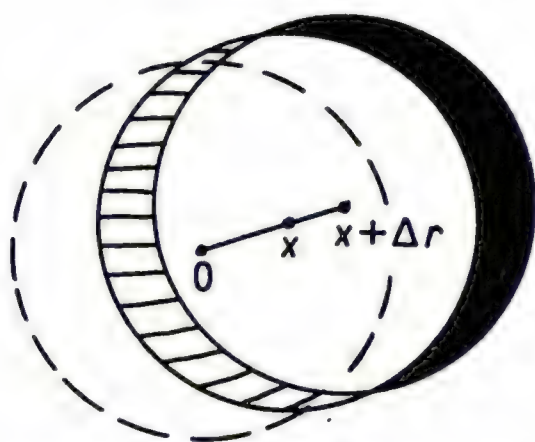
Д о к а з а т е л ь с т в о. Положительность гессиана $d_x^2 \hat{\lambda}(0)$ в точке 0 можно либо усмотреть из графика $\hat{I}$, либо получить, дифференцируя соотношение (8.14). По непрерывности отсюда следует утверждение (i). Значит, $\hat{\lambda} > 1$ на $\partial B_{\varepsilon_4}$, поэтому положим

$$2c_{26} = \min_{\partial B_{\varepsilon_4}} \hat{\lambda} - 1.$$

Обозначая радиальную координату в $\mathbb{R}^4$ через r , имеем

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0.$$

Выше мы установили (лемма 8.13), что $\partial \hat{R} / \partial \lambda > 0$. Нетрудно показать прямыми вычислениями либо усмотреть из рисунка, что $\partial \hat{R} / \partial r < 0$:



$$\hat{R}(x + \Delta r, \lambda) - \hat{R}(x, \lambda) = \text{шaded region} - \text{unshaded region} \leq 0$$

Следовательно, $\frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{\partial \hat{R}}{\partial z} / \frac{\partial \hat{R}}{\partial \lambda} > 0$, откуда вытекает утверждение (ii).

Перепишем интеграл (8.17) в виде

$$(8.19) \quad \begin{aligned} \hat{R}_{\hat{\beta}}(\lambda, x) &= \int_{\mathbb{R}^4} \hat{\beta}\left(\frac{x-z}{\lambda}\right) \hat{I}(z) dz = \\ &= \lambda^4 \int_{\mathbb{R}^4} \hat{\beta}(z) \hat{I}(x + \lambda z) dz, \end{aligned}$$

где $\hat{\beta} = \chi_{|z| \leq 1}$ — характеристическая функция единичного шара. Любая функция $\hat{\beta}$ вида $\hat{\beta}(z) = \beta(|z|)$, где β удовлетворяет условиям (8.11), лежит в малой L^1 -окрестности характеристической функции $\chi_{|z| \leq 1}$. Выберем $\hat{\beta}$ так, чтобы очевидным образом определяемая функция $\hat{\lambda}_{\hat{\beta}}$ удовлетворяла соотношению (8.14) и, кроме того, чтобы выполнялось условие

$$(iii) \quad \hat{\lambda}_{\hat{\beta}}(0) < 1 + c_{26}.$$

Заметим, что (i) — (iii) являются открытыми свойствами и $\hat{\lambda}_{\hat{\beta}}$ непрерывно зависит от $\hat{\beta}$. Выбрав таким образом функцию $\hat{\beta}$, добавим в интеграл (8.19) метрику g :

$$\hat{R}(\lambda, x, g) = \int_{\mathbb{R}^4} \beta\left(\frac{\rho_g(x, z)}{\lambda}\right) \hat{I}(z) dz.$$

Если

$$(8.20) \quad \|g - \delta\|_{C^2} < \varepsilon_5$$

для подходящего малого числа ε_5 , то $\hat{\lambda}(\cdot, g)$ по-прежнему удовлетворяет условиям (i) — (iii). А это означает, что $\hat{\lambda}(\cdot, g)$ имеет единственный минимум в шаре B_{ε_4} .

Установим теперь, какие из форм ω имеют центр.

Предложение 8.21. Существует такое число $\varepsilon_6 > 0$,

что если $\|\varphi - \delta\|_{C^2} < \varepsilon_5$ и форма $\omega \in \mathcal{F}$ удовлетворяет
условию $\|\omega - \hat{I}\|_{L^1(B_4)} < \varepsilon_6$, то центр $x(\omega, \varphi)$ кор-
ректно определен и является гладкой функцией, принимающей зна-
чения в малой окрестности нуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя неявную функцию (8.14), мы находим, что гессиан λ представляется в виде

$$d_x^2 \lambda(x, \omega, \varphi) = \int_{B_4} f(\beta, \rho_\varphi, x, z, \lambda(x, \omega, \varphi)) \omega(z),$$

где f зависит также от производных β и ρ_φ . Следовательно, свойство (i) леммы 8.18 является L^1 -открытым свойством формы ω . (Напомним, что $\lambda(x, \omega, \varphi)$ непрерывна по ω .) Кроме того, $\lambda(x, \omega, \varphi) > 1 + c_{26}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_4} \beta \left(\frac{\rho_\varphi(x, z)}{1 + c_{26}} \right) \omega(z) < 4\pi^2,$$

и это также L^1 -открытое свойство. Подобным образом, $\lambda(0, \omega, \varphi) < 1 + c_{26}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_4} \beta \left(\frac{\rho_\varphi(0, z)}{1 + c_{26}} \right) \omega(z) > 4\pi^2.$$

Выбирая подходящим образом константу ε_6 , мы видим, что если заменить $\hat{\lambda}(x)$ функцией $\lambda(x, \omega, \varphi)$, то условия (i) – (iii) будут по-прежнему выполняться. Следовательно, $\lambda(\cdot, \omega, \varphi)$ имеет единственный минимум. Поэтому существует корректно определенное отображение

$$(8.22) \quad \begin{aligned} \ell: \mathcal{F} \cap \{\omega: \|\omega - \hat{I}\|_{L^1(B_4)} < \varepsilon_6\} \times \{\varphi \in \mathcal{C}_k: \|\varphi - \delta\|_{C^2} < \varepsilon_5\} \rightarrow \\ \rightarrow (0, 2) \times B_2, \end{aligned}$$

$$\ell(\omega, \varphi) = \langle \lambda(\omega, \varphi), x(\omega, \varphi) \rangle,$$

являющееся гладким при $k \geq 2$. Отметим, что пятимерный вектор $\ell = \langle \lambda, x \rangle$ является единственным решением уравнений

$$(8.23) \quad \begin{aligned} R(\lambda, x, \omega, g) &= 4\pi^2, \\ \frac{\partial R}{\partial x}(\lambda, x, \omega, g) &= 0 \end{aligned}$$

в окрестности $\langle \lambda, x \rangle = \langle 1, 0 \rangle$. Кроме того, его ограничение на окрестность, определенную условием (8.22), удовлетворяет условиям

$$(8.24) \quad \|d_\omega \ell\| \leq c_{27},$$

$$(8.25) \quad \|d_\omega \ell(\omega, g_1) - d_\omega \ell(\omega, g_2)\| = O(\|g_1 - g_2\|_{C^2}),$$

поскольку $R(\lambda, x, \omega, g)$ линейна по ω и дважды непрерывно дифференцируема по g . Здесь, как всегда, $\ell(\cdot, g)$ зависит от L^1 -класса формы ω , и поэтому нормы в (8.24) и (8.25) являются операторными нормами, взятыми относительно L^1 -нормы в области определения.

Мы хотим обобщить нашу конструкцию на формы, близкие к модельным локализованным инстантам

$$(8.26) \quad \hat{I}_\lambda(z) = \frac{48\lambda^4 dz}{(\lambda^2 + |z|^2)^4}$$

(см. (6.8) и (6.2)). Чтобы перенести данные величины с наших локальных шаров на многообразие M , определим для каждой точки $y \in M$ и каждого $\lambda > 0$ отображения $e_{\lambda, y}$, полагая

$$(8.27) \quad e_{\lambda, y} = \exp_y \circ T_\lambda,$$

где $T_\lambda: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ — растяжение в λ раз в касательном пространстве $T_y M$, которое мы отождествляем с $\mathbb{R}^4$. Хотя указанное отождествление может быть получено лишь с точностью до элементов из $SO(4)$, это не доставит нам никаких хлопот, поскольку рассматриваемые нами геометрические объекты — формы $\hat{I}_\lambda$ и преобразования T_λ — являются $SO(4)$ -инвариантными. Итак, теперь наши меры ω и метри-

ки g определены непосредственно на M . Для удобства будем считать, что радиус инъективности многообразия M не меньше 4.

Предложение 8.28. Пусть

$$R(\lambda, x, \omega, g) = \int_M \beta \left(\frac{\rho_g(x, z)}{\lambda} \right) \omega(z).$$

Тогда существует такое $\lambda_4 > 0$, что если форма $\omega \in L^1(M; \Lambda^4 T^*M)$ удовлетворяет условию

$$\|e_{\mu, y}^*(\omega) - \hat{I}\|_{L^1(B_4)} < \varepsilon_6$$

для некоторых $\mu \leq \lambda_4$, $y \in M$ и

$$\int_M \omega \leq 9\pi^2 \quad (= 8\pi^2 + \pi^2),$$

то уравнения

$$R(\lambda, x, \omega, g) = 4\pi^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}(\lambda, x, \omega, g) = 0$$

имеют единственное решение

$$l(\omega, g) = \langle \lambda(\omega, g), x(\omega, g) \rangle \in (0, 2\lambda_4) \times M,$$

гладко зависящее от ω и g . Кроме того,

$$\|d_\omega l(\omega, g)\| = O(\lambda),$$

$$\|d_\omega l(\omega, g) - d_\omega l(\omega, \delta)\| = O(\lambda^3),$$

где $\lambda = \lambda(\omega, g)$ и δ — плоская метрика в экспоненциальных координатах в точке $x(\omega, g)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\omega} = e_{\mu, y}^*(\omega)$ и $\tilde{g} = e_{\mu, y}^*(g)/\mu^2$ в шаре $B_4 \subset T_y M$. Тогда по условию

$$\|\tilde{\omega} - \hat{I}\|_{L^1(B_4)} < \varepsilon_6.$$

Кроме того, норма разности $\|\tilde{g} - \delta\|_{C^2} = O(\mu^2)$, и при достаточно малых λ_4 она становится меньше, чем ε_5 . Следовательно, в силу предложения 8.2I определена функция

$$\ell(\omega, g) = \langle \mu \cdot \lambda(\tilde{\omega}, \tilde{g}), e_{\mu, y}(x(\tilde{\omega}, \tilde{g})) \rangle.$$

Поскольку мы рассматриваем прообраз метрики g , эта функция не зависит от выбора числа μ и точки y в шаре малого радиуса, а условия на интеграл гарантируют, что y можно считать лежащей в шаре B_4 . Так как $\lambda(\tilde{\omega}, \tilde{g}) \leq 2$, то $\lambda(\omega, g) \leq 2\lambda_4$. Поэтому из оценки (8.24) следует, что

$$\|d_\omega \ell(\omega, g)\| = \mu \|d_\omega \ell(\tilde{\omega}, \tilde{g})\| = O(\lambda),$$

а соотношение (8.25) показывает, что

$$\begin{aligned} \|d_\omega \ell(\omega, g) - d_\omega \ell(\omega, \delta)\| &= \\ &= \mu \|d_\omega \ell(\tilde{\omega}, \tilde{g}) - d_\omega \ell(\tilde{\omega}, \tilde{\delta})\| = O(\lambda^3), \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda(\omega, g)$.

Теперь мы наконец готовы определить центр $\lambda(D)$ и масштаб $x(D)$ локализованной связности D . Если задана такая связность, введем 4-форму $\omega(D)$, полагая

$$(8.29) \quad \omega(D) = -\text{tr } F_D \wedge * F_D = |F_D|^2 * 1.$$

Заметим, что форма $\omega(D)$ калибровочно инвариантна.

О п р е д е л е н и е. Отнесем к множеству $\mathcal{CC}$ локализованных связностей те связности D , которые удовлетворяют неравенствам

$$\|e_{\mu, \gamma}^*(\omega(D)) - \hat{I}\|_{L^1} < \varepsilon_6 \quad \text{и} \quad \int_M \omega(D) \leq 9\pi^2$$

для некоторых $\mu \leq \lambda_4$ и $\gamma \in M$.

Снабдим множество $\mathcal{CC}$ локализованных связностей L_1^2 -топологией: если $D, D' \in \mathcal{CC}$ и $D' = D + A$, то положим $\|D - D'\| = \|A\|_{L_1^2}$. Для фиксированной метрики g на M определим отображение $\mathcal{B}(D)$ формулой

$$\mathcal{B}(D) = \ell(\omega(D), g).$$

Итогом настоящего раздела является следующая

Т е о р е м а 8.30. Отображение

$$\mathcal{B}: \mathcal{CC} \rightarrow (0, \lambda_4) \times M$$

является гладким и удовлетворяет условию

$$|d\mathcal{B}_D(A)| \leq c_{28} \lambda(D) \|DA\|_{L^2(M)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно цепному правилу,

$$d\mathcal{B}_D = d\ell_{\omega(D)} \circ d\omega_D.$$

Дифференцируя формулу (8.29), найдем явный вид $d\omega_D$:

$$d\omega_D(A) = -2 \operatorname{tr} F_D \wedge *DA.$$

Поэтому, используя оценку теоремы 8.28 и неравенство Коши – Шварца, мы получаем, что

$$\begin{aligned}
 |d\mathcal{B}_D(A)| &= O(\lambda) \|\operatorname{tr} F_D \wedge * DA\|_{L^1} = \\
 &= O(\lambda) \|F_D\|_{L^2} \|DA\|_{L^2},
 \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы.

В силу калибровочной инвариантности наших конструкций, отображение $\mathcal{B}$ пропускается через пространство орбит:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{SD} \cap \mathcal{CC} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \\
 \downarrow & & \searrow \\
 \mathcal{M}_\lambda \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{CC} & \xrightarrow{\bar{\mathcal{B}}} & (0, \lambda_4) \times M
 \end{array}$$

Здесь $\mathcal{M}_\lambda = \{\bar{D} \in \mathcal{M} : \lambda(\bar{D}) < \lambda\}$. В гл. 9 мы установим, что для достаточно малых λ отображение $\bar{\mathcal{B}}: \mathcal{M}_\lambda \rightarrow (0, \lambda) \times M$ является диффеоморфизмом.

КОМПАКТНОСТЬ В $\mathcal{M}$

В предыдущем разделе мы точно определили класс $\mathcal{CC}$ локализованных связностей, однако пока не доказано, что этот класс непуст. На самом деле в $\mathcal{CC}$ лежат построенные в гл. 7 связности с бесконечно возрастающими кривизнами. Тем самым следующая теорема есть в некотором роде обращение процедуры прививки.

Т е о р е м а 8.31. Пусть $\{\bar{D}_j\}$ — такая последовательность в $\mathcal{M}$, что $\max_M |F_{\bar{D}_j}| \rightarrow \infty$. Тогда для любого $K > 0$ существуют такие поднятия D_j элементов $\bar{D}_j$, точки $x_j \in M$ и числа $\lambda_j < 1/K$, что

$$(i) \quad \lambda_j \rightarrow 0;$$

$$(ii) \quad e_{\lambda_j, x_j}^*(D_j) \rightarrow I_K \text{ в } C^k(B_K).$$

Здесь I_K — основной инстантон (8.16), ограниченный на шар $B_K \subset T_{x_j} M \approx \mathbb{R}^4$; отображение e_{λ_j, x_j} определено формулой (8.27).

Доказательство. Положим

$$\max_M |F_{\bar{D}_j}| = |F_{\bar{D}_j}|(x_j) = \frac{1}{\lambda_j^2} \rightarrow \infty.$$

Заметим, что точки x_j необязательно определены однозначно (если таких точек несколько, мы выбираем одну из них) и что λ_j, x_j не совпадают с $\lambda(\bar{D}_j)$ и $x(\bar{D}_j)$, определенными в предыдущем разделе. Для каждого индекса j фиксируем поднятие D_j элемента $\bar{D}_j$. Тогда связность $\tilde{D}_j = e_{\lambda_j, x_j}^*(D_j)$ автодуальна относительно $g_j = e_{\lambda_j, x_j}^*(g)$, где g — метрика на M . Так как автодуальные уравнения конформно инвариантны, то связность $\tilde{D}_j$ автодуальна также и относительно метрики $\tilde{g}_j = g_j / \lambda_j^2$. Из неравенства (6.13) без труда получается, что $\tilde{g}_j \rightarrow \delta$, причем эта сходимость равномерна на большем шаре B_{K+1} . Поскольку

$$\max_{B_K} |F_{\tilde{D}_j}| = 1,$$

глобальная теорема компактности 8.8 гарантирует существование такой подпоследовательности $\{j'\} \subset \{j\}$ и (возможно, различных) поднятий $D_{j'}$, что $\tilde{D}_{j'} \rightarrow D_K$ в $C^k(B_K)$, причем предельная связность D_K автодуальна относительно метрики δ . Используя диагональный процесс, можно устроить так, чтобы подпоследовательность сходилась одновременно на всех B_K , $K \in \mathbb{Z}$, и тем самым получить предельную связность D на $\mathbb{R}^4$ с $\max_{\mathbb{R}^4} |F_D| = |F_D|(0) = 1$.

По теореме 6.42 об устранении особенности связность D продолжается до автодуальной связности на S^4 . Кроме того,

$$0 < \int_{\mathbb{R}^4} |F_D|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{j' \rightarrow \infty} \int_{B_K} |F_{\tilde{D}_{j'}}|^2 \leq 8\pi^2,$$

откуда следует, что D — это инстантон с топологическим зарядом $k = 1$ (см. обсуждение, следующее за теоремой 6.42). Данная в гл. 6 классификация инстантонов на S^4 с топологическим зарядом $k = 1$ показывает, что D калибровочно эквивалентен основному инстантону. А теперь воспользуемся одной забавной леммой из теории метрических пространств: если последовательность в метрическом пространстве X обладает тем свойством, что каждая ее подпоследовательность имеет в свою очередь подпоследовательность, сходящуюся к $p \in X$, то и вся последовательность сходится к точке p . Эта лемма избавляет нас от необходимости переходить к подпоследовательностям при ограничении связностей на фиксированное компактное множество. Так как любая подпоследовательность из $\{\bar{D}_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы и приведенные выше рассуждения дают подпоследовательность, сходящуюся в $C^k(B_K)$ к I_K , мы заключаем, что $\tilde{D}_j \rightarrow I_K$ в $C^k(B_K)$. В то же время из-за отсутствия равномерных оценок скорости сходимости при изменении K мы не можем утверждать, что $\tilde{D}_j \rightarrow I$ в $C^k(\mathbb{R}^4)$.

Считая выполненными условия теоремы, можно получить несколько следствий. Из них только первое имеет непосредственное отношение к компактности. Следствие 8.35, описывающее поведение локализованных инстантонов вне их центров, окажется полезным в гл. 9.

С л е д с т в и е 8.32. $\lambda(\bar{D}_{j'}) \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что число $\lambda(\bar{D})$ определено для любого $\bar{D} \in \mathcal{M}$ и что $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция от $\bar{D}$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из того, что $\tilde{D}_{j'} \rightarrow I_K$, $\lambda(I_K) = 1$ и $\lambda(\bar{D}_{j'}) = \lambda_{j'} \cdot \lambda(\tilde{D}_{j'})$.

Используя конструкцию Таубса, можно найти последовательность $\{\bar{D}_j\}$, удовлетворяющую условиям теоремы 8.31. Тогда, согласно следствию 8.32, $\bar{D}_j \in \mathcal{CC}$ для больших j . Следовательно, множества $\mathcal{M}_\lambda$ локализованных инстантов не пусты.

Следующее утверждение является, по существу, переформулировкой теоремы 8.31.

С л е д с т в и е 8.33. Пусть $\{\bar{D}_j\}$ — последовательность в $\mathcal{M}$ с постоянным центром $x = x(\bar{D}_j)$ и с $\lambda_j = \lambda(\bar{D}_j) \rightarrow 0$. Тогда $e_{\lambda_j, x}^*(D_j) \rightarrow I_K$ в $C^k(B_K)$ для некоторых поднятий D_j .

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению масштаба $\lambda(\bar{D}_j)$

$$\int_M \beta \left(\frac{\rho_g(x, z)}{\lambda_j} \right) |F_{\bar{D}_j}|^2(z) * 1 = 4\pi^2.$$

Так как $\lambda_j \rightarrow 0$, то из этого равенства без труда выводится, что

$$\max_M |F_{\bar{D}_j}| \rightarrow \infty.$$

Теперь остается применить теорему 8.31.

Возвращаясь к условиям теоремы 8.31, предположим (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что $x_j \rightarrow x$.

С л е д с т в и е 8.34. Для любого $\rho > 0$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{M \setminus B_\rho(x)} |F_{\bar{D}_j}|^2 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lambda_j \rightarrow 0$, то $B_{\lambda_j}(x) \subset B_\rho(x)$ для достаточно больших j , а поскольку $\tilde{D}_j \rightarrow I_{1/\rho}$ в $B_{1/\rho}$, мы имеем

$$\int_{B_\rho(x)} |F_{\bar{D}_j}|^2 \rightarrow 8\pi^2.$$

С л е д с т в и е 8.35. Последовательность $\{D_j|_{M \setminus B_\rho(x)}\}$ калибровочно эквивалентна последовательности, сходящейся к тривиальной связности на $\eta|_{M \setminus B_\rho(x)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим глобальную теорему компактности 8.8 к области $\Omega = M \setminus B_\rho(x)$. Так как предельная связность D является плоской (в силу 8.34 ее кривизна равна нулю) и не существует нетривиальных представлений $\pi_1(\Omega) = \pi_1(M) \rightarrow SU(2)$, то D тривиальна. Как и раньше, здесь не нужно переходить к подпоследовательности, поскольку возможен лишь один предел.

Покажем, наконец, что усеченное пространство модулей компактно.

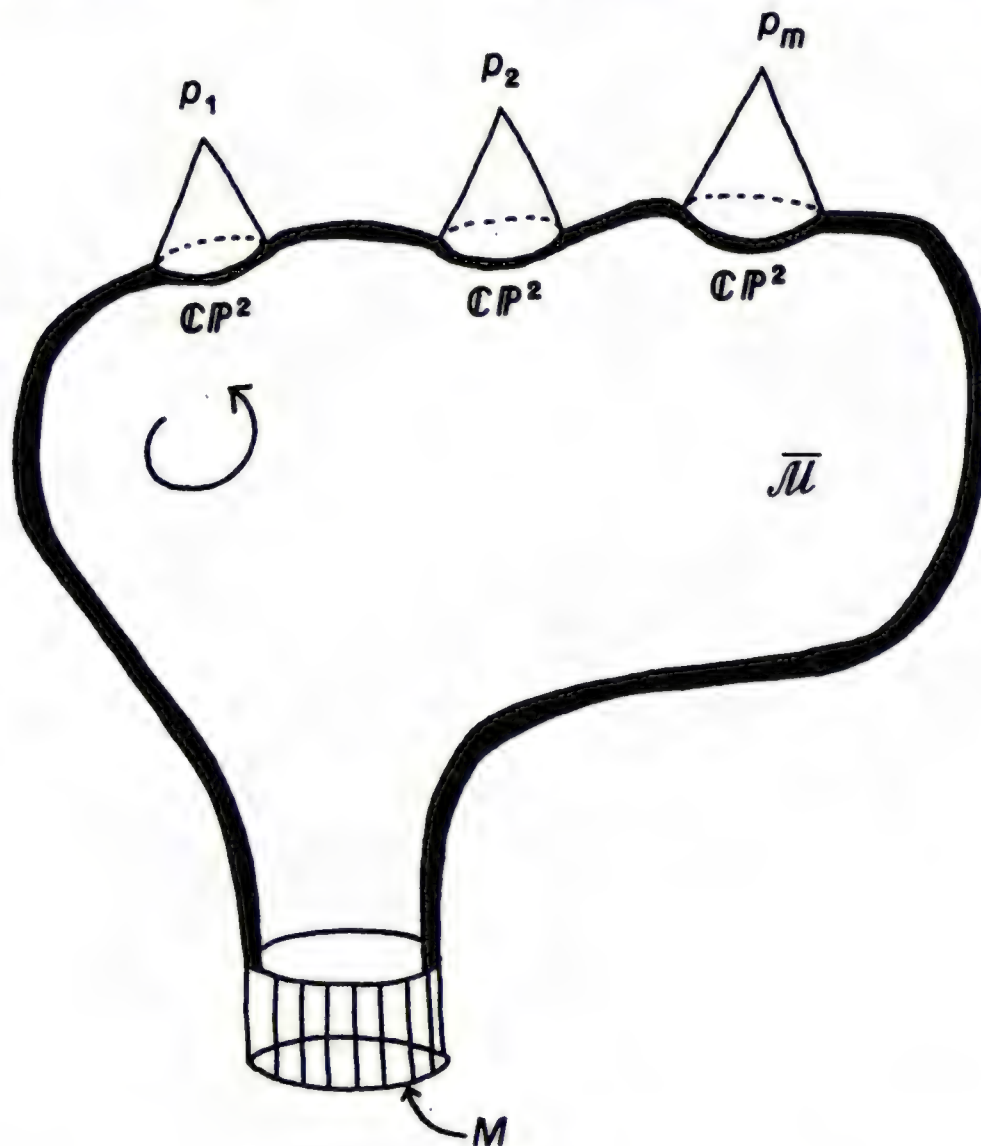
Т е о р е м а. Для любого $\lambda > 0$ пространство $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_\lambda$ компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\bar{D}_j\}$ — некоторая последовательность в $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_\lambda$. Так как $\lambda(\bar{D}_j) \not\rightarrow 0$, то максимум норм кривизн $\max_M |F_{\bar{D}_j}|$ равномерно ограничен в силу 8.31 и 8.32. Но тогда глобальная теорема компактности 8.8 дает нам в $C^k(M)$ сходящуюся подпоследовательность поднятий $D_{j'} \rightarrow D$. Следовательно, $\bar{D}_{j'} \rightarrow \bar{D}$ в $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_\lambda$, что и требовалось доказать.

Глава 9

ТЕОРЕМА О ВОРОТНИКЕ

В этой главе мы завершим доказательство теоремы Дональдсона, показав, что для достаточно малых λ многообразие $\mathcal{M}_\lambda = \{\bar{D} \in \mathcal{M} : \lambda(\bar{D}) \leq \lambda\}$ диффеоморфно произведению $(0, \lambda) \times M$:



Напомним (см. теорему 8.30), что для $\lambda \leq \lambda_4$ существует корректно определенное гладкое отображение

$$\begin{aligned} \bar{B}: \mathcal{M}_\lambda &\rightarrow (0, \lambda) \times M, \\ \bar{D} &\mapsto \langle \lambda(\bar{D}), x(\bar{D}) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $x(\bar{D})$ — центр инстантона $\bar{D}$ и $\lambda(\bar{D})$ — его масштаб.

Т е о р е м а 9.1. Для $\lambda \leq \lambda_8$ отображение $\bar{\mathcal{B}}$ является диффеоморфизмом.

Доказательство этой теоремы о воротнике разбивается на несколько шагов. Вначале мы показываем, что отображение $\bar{\mathcal{B}}$ является собственным — это просто переформулировка теоремы компактности 8.36. Затем устанавливается, что $\bar{\mathcal{B}}$ — локальный диффеоморфизм. Приведем краткий набросок основных идей доказательства. Напомним, что для нашего модельного пространства S^4 конформная группа транзитивно действует на пространстве модулей. Конформное преобразование $\mathbb{R}^4$, состоящее из сдвигов на вектор b и растяжения в μ раз, переводит основной инстантон в инстантон с центром b и масштабом μ . На инфинитезимальном уровне это дает пятипараметрическое семейство деформаций, на котором дифференциал $d\bar{\mathcal{B}}_{S^4}$ действует как тождественный оператор. Перенесенные на более общее многообразие эти деформации перестают быть конформными и, следовательно, не сохраняют автодуальных уравнений. Тем не менее, с помощью оценок распада на кривизну мы сможем показать, что отклонение от автодуальности является малым и поэтому инфинитезимальная проекция Таубса (7.19) исправляет эти деформации. Снова мы получаем пятипараметрическое пространство, на котором обратим дифференциал $d\bar{\mathcal{B}}$. Тем самым $\bar{\mathcal{B}}$ — локальный диффеоморфизм.

Собственные локальные диффеоморфизмы являются конечнолистными накрывающими отображениями, поэтому, чтобы доказать, что отображение $\bar{\mathcal{B}}$ — глобальный диффеоморфизм, осталось установить его биективность. Предположим, что $\bar{\mathcal{B}}(\bar{D}) = \bar{\mathcal{B}}(\bar{D}')$. Тогда подходящий выбор калибровки дает такие поднятия D, D' элементов $\bar{D}, \bar{D}'$, для которых мала норма $\|D - D'\|_{L^4}$. Согласно теореме о локальной связности 7.30, D и D' можно соединить в $\mathcal{M}$ коротким путем и этот путь не выйдет за пределы воротника, поскольку расстояние между локализованным и нелокализованным инстантонами велико. Значит, $\bar{D} = \bar{D}'$, чем и завершается доказательство теоремы 9.1.

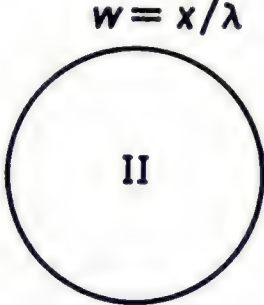
Наше изложение следует оригинальному доказательству Дональдсона, хотя мы сделали его более подробным и ввели несколько технических усовершенствований.

ОЦЕНКИ РАСПАДА

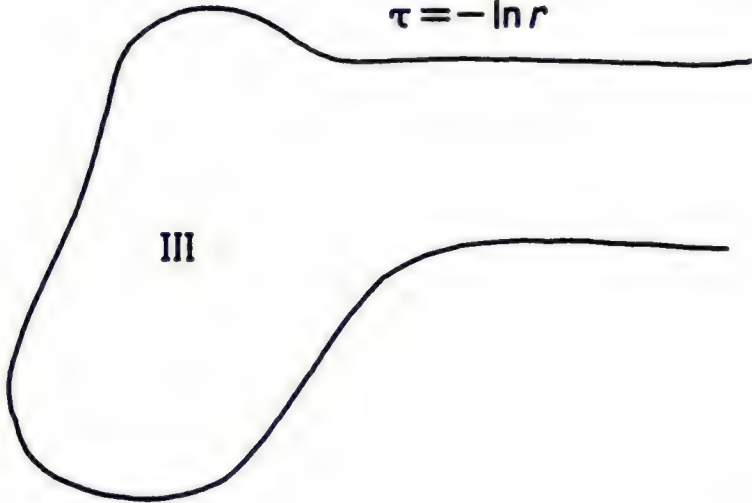
В предыдущих главах мы получили три различных локальных модели для локализованных инстантонов D_λ : стандартную модель $\bar{I}$ с масштабом λ , нормализованную модель $\bar{II}$ с масштабом 1 и раздутую цилиндрическую модель $\bar{III}$. Мы будем попеременно использовать все три модели, и для удобства изобразим их графически вместе с соответствующими метриками:



$$g_1(x) = \delta + O(|x|^2)$$

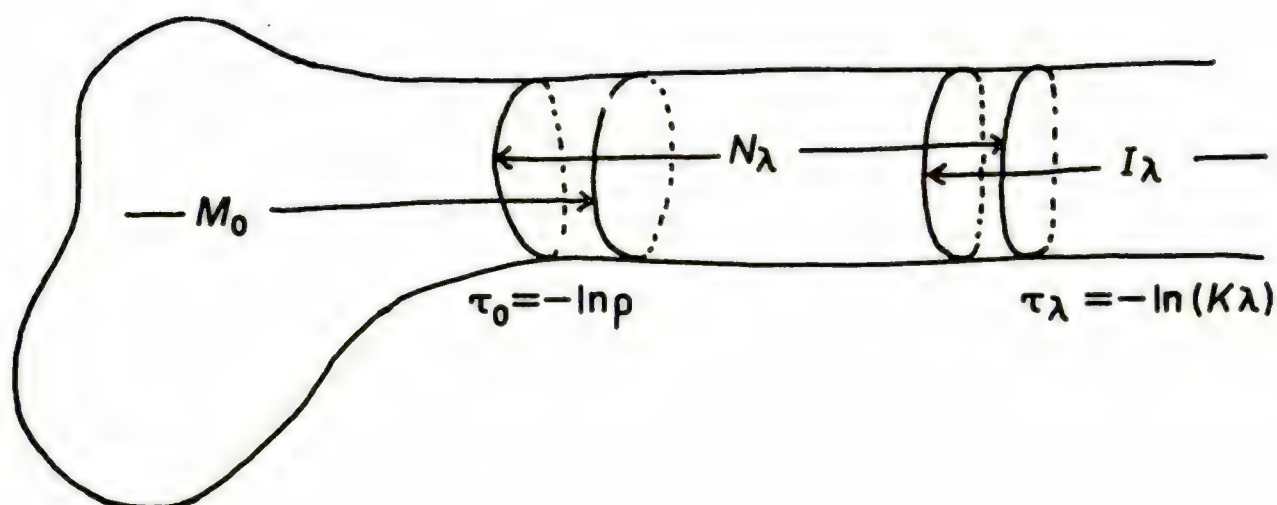


$$g_2(w) = \lambda^2(\delta + \lambda^2 O(|w|^2))$$



$$g_3(\tau, \theta) = d\tau^2 + d\theta^2 + O(e^{-2\tau})$$

Разобьем раздутый инстантон на три перекрывающиеся области: компактную часть $M_0 = \{\tau \leq \tau_0 + 1\}$, цилиндр $I_\lambda = \{\tau \geq \tau_\lambda - 1\}$ и соединяющую их шейку $N_\lambda = \{\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\lambda\}$:



(Не нужно смешивать шейку инстантона с воротником пространства модулей!) Здесь ρ — малая константа, определяемая кривизной многообразия M в окрестности точки $x(D_\lambda)$, а $\tau_0 = -\ln \rho$ играет роль левой границы τ_ℓ из предложения 7.10. Правая граничная точка $\tau_\lambda = -\ln(K\lambda)$; большая константа K будет фиксирована лишь в самом конце доказательства. Масштаб λ принимает значения на полуинтервале $(0, \bar{\lambda}]$, где $\bar{\lambda}$ зависит от K и выбирается так, чтобы произведение $K\bar{\lambda}$ было мало по сравнению с ρ .

Суммируем результаты гл.8 следующим образом: D_λ выглядит как стандартный инстантон на цилиндре I_λ и является почти плоским на компактной части M_0 , причем оба эти свойства усиливаются при $\lambda \rightarrow 0$. Однако мы пока не умеем контролировать инстантон D_λ в области шейки $N_\lambda = \{K\lambda \leq r \leq \rho\}$. Чтобы понять, насколько сильно распадается D_λ в этой области, обратимся к стандартным моделям. Кривизна (см. (6.8))

$$(9.2) \quad |F_\lambda|(r, \theta) = \frac{\sqrt{48} \lambda^2}{(\lambda^2 + r^2)^2}$$

удовлетворяет неравенству

$$(9.3) \quad |F_\lambda|(r, \theta) \leq c_{29} \frac{K^2 \lambda^2}{r^4}, \quad r \geq K\lambda.$$

Различие между этим неравенством и нашей окончательной оценкой (теорема 9.8) отражает тот факт, что отбрасываемый член

$|\nabla F| - |d|F||$ в (6.21) имеет тот же самый порядок, что и другие члены. Заметим, что в наших рассуждениях будет использовано точное значение коэффициента R в формуле Вейтценбёка (6.26) (см. приложение с). Поскольку эта формула приводит к вычислительным трудностям (в самом деле, несколько предыдущих публикаций содержали ошибки), нас утешает существование иного доказательства теоремы 9.8 с еще лучшей оценкой распада $([U_2], [D])$. Это доказательство основано на точном вычислении собственного значения некоторого оператора на S^3 .

Следствие 8.34 дает грубую L^2 -оценку кривизны связности D_λ вне ее центра. Приведем теперь более точную оценку.

Предложение 9.4. Имеет место неравенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{\tau \leq \tau_\lambda} |F_{D_\lambda}| \leq \nu/2,$$

в котором $\nu = c_{30}/K^2$.

Здесь, как и всюду в этом разделе, норма берется относительно раздутой метрики g_3 . Множитель $1/2$ введен для упрощения дальнейших вычислений.

Доказательство. Из теоремы регулярности 8.3 следует, что

$$|F_{D_\lambda}|^2(\tau, \theta) \leq c_{31}(\tau) \int_{B_\tau(\tau, \theta)} |F_{D_\lambda}|^2.$$

Так как часть M_0 компактна, а N_λ имеет локально однородную геометрию, мы можем выбрать равномерно ограниченную последовательность шаров B_τ , покрывающих $M_0 \cup N_\lambda$. Следовательно,

$$(9.5) \quad \max_{\tau \leq \tau_\lambda} |F_{D_\lambda}|^2 \leq c_{31} \int_{\tau \leq \tau_\lambda + 1} |F_{D_\lambda}|^2.$$

В силу конформной инвариантности, формулы (9.2) и следствия 8.33

$$(9.6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\tau \geq \tau_\lambda + 1} |F_{D_\lambda}|^2 = 8\pi^2 - \int_{|w| \leq K/e} \frac{48 dw}{(1+|w|^2)^4} \leq \\ \leq \frac{24\pi^2}{(1+K^2/e^2)^2}.$$

Требуемый результат вытекает теперь из неравенств (9.5) и (9.6).

Используя свойство автодуальных связностей минимизировать функционал Янга – Миллса, покажем, что кривизна на N_λ ограничивает кривизну на M_0 .

Предложение 9.7. Пусть D – автодуальная связность, кривизна которой удовлетворяет условию

$$|F_D|(\tau, \theta) \leq \varepsilon_\gamma, \quad \tau_m - 1 \leq \tau \leq \tau_m$$

для некоторых $\varepsilon_\gamma < 1$ и $\tau_m \geq \tau_0$. Тогда

$$|F_D|(\tau, \theta) \leq c_{32} \varepsilon_\gamma, \quad \tau \leq \tau_m,$$

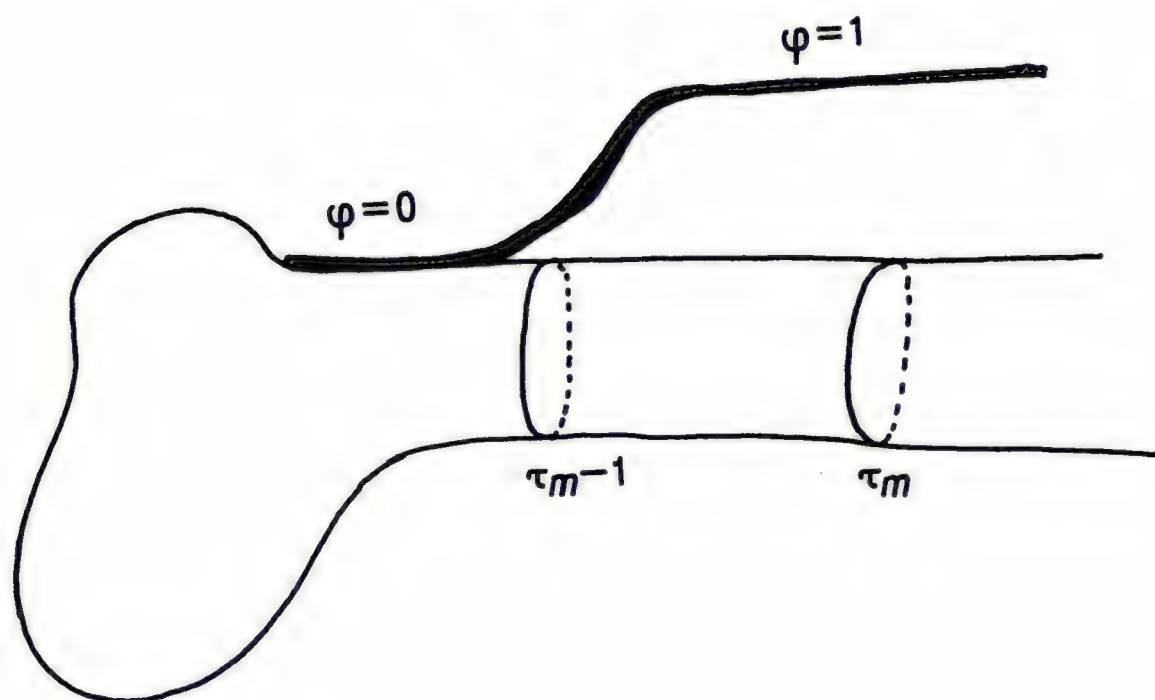
где константа $c_{32} > 0$ не зависит от D .

Точно такая же оценка имеет место и на M_0 .

Доказательство. В экспоненциальной калибровке (см. предложение 9.38) связность D на $\tau_m - 1 \leq \tau \leq \tau_m$ может быть представлена в виде $D = d + A$, где

$$|A| \leq c_{33} \varepsilon_\gamma.$$

Пусть φ – срезающая функция в окрестности τ_m :



Образуем новую, не автодуальную связность D_φ , полагая

$$D_\varphi = \begin{cases} D & \text{при } \tau \geq \tau_m, \\ d + \varphi A & \text{при } \tau_m \geq \tau \geq \tau_{m-1}, \\ \text{плоская} & \text{при } \tau_{m-1} \geq \tau. \end{cases}$$

Так как D является абсолютным минимумом функционала $\mathcal{U}\mathcal{M}$ из (2.13), то

$$\begin{aligned} \int_{\tau \geq \tau_m} |F_D|^2 + \int_{\tau \leq \tau_m} |F_D|^2 &= \int_M |F_D|^2 \leq \int_M |F_{D_\varphi}|^2 \leq \\ &\leq \int_{\tau \geq \tau_m} |F_D|^2 + c_{34} \varepsilon_7. \end{aligned}$$

Оценка максимума нормы кривизны получается теперь из теоремы регулярности точно так же, как в предыдущем предложении.

Теперь мы в состоянии заняться оценкой распада. Пусть D_λ — автодуальная связность с масштабом λ и F_λ — ее кривизна.

Т е о р е м а 9.8. Для любого данного числа $\gamma < \sqrt{2}$ существуют такое $K \geq K_1 = K_1(\gamma)$ и достаточно малое ρ , что при $\lambda \leq \lambda_5 = \lambda_5^1(\rho, K^1)$

$$|F_\lambda|(\tau, \theta) \leq c_{35} \nu e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau)}, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_\lambda,$$

относительно раздутой метрики $\mathcal{G}_3$. В метрике $\mathcal{G}_1$ это нера-
венство принимает вид

$$|F_\lambda|(x) \leq c_{35} \nu \left(\frac{K\lambda}{|x|} \right)^\gamma \cdot \left(\frac{1}{|x|} \right)^2, \quad K\lambda \leq |x| \leq \rho.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обращая в (6.26) ориентацию многообразия, мы получим формулу Вейтценбёка для автодуальных 2-форм:

$$(9.9) \quad 2D_+ D_+^* = \nabla^* \nabla - 2W^+(\cdot) + \frac{R}{3} + [P_+ F, \cdot]$$

на $\Omega_+^2(\text{ad } \eta)$, где $D_+ = P_+ D$. Подобно неравенству (7.13) мы получаем для $F = F_\lambda$ оценку

$$\Delta |F| + 2|F| \leq (2\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} + |F|)|F|$$

на цилиндре $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\lambda$. (Вместо неравенства (6.18) мы пользуемся здесь более тонким неравенством (6.21).) Тогда $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ в силу соотношений (7.6) и (7.7) и $|F| \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$ в силу предложения 9.4. Следовательно,

$$\Delta |F| + \gamma' |F| \leq 0, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_\lambda,$$

причем число $\gamma' < 2$ можно взять произвольно близким к 2. Для малых λ в силу предложения 9.4 мы имеем также $|F|(\tau_\lambda, \theta) \leq \nu$. Введем временное обозначение

$$\alpha = \max_{\theta} |F|(\tau_0, \theta).$$

Тогда принцип максимума 7.10 доставляет нам оценку

$$(9.10) \quad |F|(\tau, \theta) \leq \alpha e^{-\gamma(\tau - \tau_0)} + \nu e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau)},$$

где $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\lambda$, $\gamma < \sqrt{\gamma'}$. Напомним, что γ можно взять произвольно близким к $\sqrt{\gamma'}$, если положить $\tau_0 \rightarrow \infty$ (т.е. $\rho \rightarrow 0$). Элементарные аналитические выкладки показывают, что функция в правой части неравенства (9.10) достигает минимума при

$$\tau_m = \frac{1}{2} (\tau_0 + \tau_\lambda) + \frac{\ln(\alpha/\nu)}{2\gamma}$$

и этот минимум равен

$$2\sqrt{\alpha\nu} e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau_0)/2}.$$

Из предложения 9.7 следует, что можно взять число α порядка этого минимума:

$$\alpha \leq 2c_{32} \sqrt{\alpha\nu} e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau_0)/2}$$

или, после возведения в квадрат,

$$\alpha \leq 4c_{32}^2 \nu e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau_0)}.$$

Возвращаясь к неравенству (9.10), имеем

$$(9.11) \quad |F|(\tau, \theta) \leq \nu e^{-\gamma(\tau_\lambda - \tau)} \left[1 + 4c_{32}^2 e^{-2\gamma(\tau - \tau_0)} \right],$$

откуда немедленно следует требуемая оценка.

Принадлежащее Дональдсону доказательство оценок распада в корне отличается от нашего: он основывается на формуле для относительных классов Чжэня многообразий с краем. Доказательство Дональдсона работает для автодуальных полей, в то время как наша оценка пригодна для любого минимизирующего поля Янга – Миллса. (Это не обязательно одно и то же – достаточно рассмотреть, например, многообразие с краем.) Дональдсон указал, что из оценок распада можно вывести теорему об устранении особенностей 6.42. Мы включим соответствующее доказательство в приложение D.

КОНФОРМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

В этом разделе для каждой достаточно локализованной автодуальной связности $D \in \mathcal{CC}$ мы найдем пятипараметрическое семейство деформаций $\Sigma = \Sigma_{\mu, b}: \mathbb{R}^5 \rightarrow T_D \mathcal{SD}$, обладающее тем свойством, что $d\mathcal{B} \circ \Sigma$ — эпиморфизм. Так как $\mathcal{M}$ — пятимерное многообразие и отображение $\mathcal{B}(D) = \overline{\mathcal{B}}(\overline{D})$ пропускается через пространство модулей, то дифференциал $d\overline{\mathcal{B}}$ обратим. Отсюда следует, что $\overline{\mathcal{B}}$ — локальный диффеоморфизм. Напомним, что отображение $\mathcal{B}$ неявно определяется функционалом $R(\lambda, x, \omega, g)$, который гладко зависит от $\omega = |F_{\overline{D}}|^2 * 1$ и от C^k -метрики g . В плоском случае

$$R(\lambda, x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^4} \beta\left(\frac{|x - z|}{\lambda}\right) \omega(z)$$

для подходящей срезающей функции β . Из формулы замены переменных в интеграле вытекает, что

$$R(\lambda, x, \omega) = R(\mu\lambda, \mu x + b, T_{\mu, b}^*(\omega)),$$

где $T_{\mu, b}(y) = \mu y + b$ — конформное преобразование, состоящее из растяжения в μ раз и сдвига на вектор b . Следовательно, отображение

$$(9.12) \quad \langle \mu, b \rangle \mapsto \langle \lambda(T_{\mu, b}^*(\omega)), x(T_{\mu, b}^*(\omega)) \rangle = \\ = \langle \mu\lambda(\omega), \mu x(\omega) + b \rangle$$

является диффеоморфизмом на окрестность точки $\langle \lambda, x \rangle \in \mathbb{R}^5$. В частности, если $x(\omega) = 0$ (чего всегда можно достичь подходящим выбором системы координат), то его дифференциал в нуле представляет собой тождественное отображение при $\lambda = 1$ и равен

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \text{id} \end{array} \right)$$

в общем случае. Чтобы разобраться с множителем λ , рассмотрим отображение

$$(9.13) \quad \Sigma_{\mu, \ell} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_{t\mu/\lambda, t\ell}^*(\omega).$$

Ясно, что композиция

$$\langle \mu, \ell \rangle \mapsto d_\omega \ell \circ \Sigma_{\mu, \ell}$$

является тождественным преобразованием. Заметим, что операция, с помощью которой определяются $\Sigma_{\mu, \ell}$, — это производная Ли в направлении векторных полей

$$(9.14) \quad \sum_k \left(\ell^k + \frac{\mu}{\lambda} x^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Эти векторные поля и порождаемые ими конформные преобразования действуют на связностях (гл.6). Поэтому, полагая

$$\omega(D) = -\text{tr}(F_D \wedge * F_D) = |F_D|^2 * 1,$$

мы видим, что из конформной инвариантности оператора Ходжа $*$ на 2-формах следует равенство

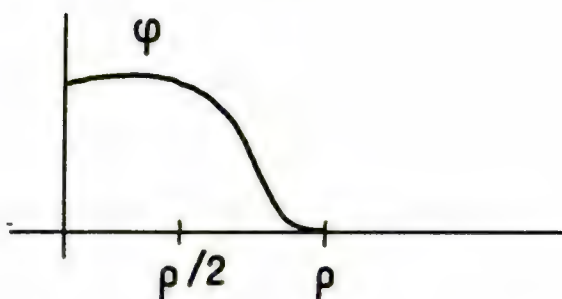
$$T_{\mu/\lambda, \ell}^*(\omega(D)) = \omega(T_{\mu/\lambda, \ell}^*(D)).$$

Кроме того, если связность D автодуальна, то $T_{\mu/\lambda, \ell}^*(D)$ также автодуальна, поскольку уравнения Янга — Миллса конформно инвариантны. Значит, композиция

$$\langle \mu, \ell \rangle \mapsto T_{\mu/\lambda, \ell}^*(D) \xrightarrow{\mathfrak{B}} \langle \lambda(\cdot), x(\cdot) \rangle$$

является в плоском случае тождественным отображением.

В искривленном случае инфинитезимальные конформные преобразования (9.14) могут быть перенесены на многообразие M с помощью срезающей функции φ такого вида:



Фиксируем раз и навсегда автодуальную связность D с $\lambda(D) = \lambda$. Определим в нормальных координатах на M в окрестности точки $x(D)$ пятипараметрическое семейство векторных полей

$$(9.15) \quad X_{\mu, \nu} = \varphi(|x|) \sum_k \left(\nu^k + \frac{\mu}{\lambda} x^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

На интуитивном уровне $X_{\mu, \nu}$ — это инфинитезимальное растяжение в μ/λ раз и сдвиг на ν в окрестности точки $x(D)$, рассматриваемые лишь в шаре радиуса ρ . Мы хотим поднять это действие на уровень связностей, но в отличие от плоского случая здесь имеются две существенные трудности. Во-первых, метрика g_1 многообразия M не является плоской, и поэтому для векторных полей (9.15) дифференциал $d\mathcal{B}$ не является тождественным преобразованием. Однако метрика g_1 почти плоская вблизи начала координат, так что отклонение от тождественного отображения мало. Вторая трудность состоит в том, что преобразование $X_{\mu, \nu}$ не конформно и, значит, не сохраняет автодуальных уравнений. Другими словами, поднятое в пространство связностей $X_{\mu, \nu}$ не является касательным векторным полем к автодуальным связностям $\mathcal{SD}$. Однако вблизи начала координат преобразование $X_{\mu, \nu}$ почти конформно, а вне начала координат кривизна быстро убывает. Значит, приобретенная антиавтодуальная кривизна мала. Теперь можно применить инфинитезимальную проекцию Таубса (7.19); при этом общая поправка мала. Таким образом, мы получаем пятипараметрическое семейство

$$(9.16) \quad \Sigma_{\mu, \nu} = L_{X_{\mu, \nu}} D + \mathcal{D}^* \Phi_{\mu, \nu}$$

инфинитезимальных вариаций D , касательное к $\mathcal{SD}$.

Т е о р е м а 9.17. Пусть $\lambda(D) \leq \lambda_6$. Тогда

$$d\mathcal{B}_D \circ \Sigma: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

является обратимым отображением.

Приведенные выше рассуждения представляют собой набросок доказательства этой теоремы. Строгое доказательство будет дано ниже.

Так как отображение $\mathcal{B}$ постоянно на орбитах действия группы калибровочных преобразований, то пятимерный образ Σ в $T_D \mathcal{SD}$ проектируется на $T_{\bar{D}} \mathcal{M}$, и мы получаем

С л е д с т в и е 9.18. Пусть $\lambda \leq \lambda_6$. Тогда

$$\bar{\mathcal{B}}: \mathcal{M}_\lambda \rightarrow (0, \lambda) \times M$$

является локальным диффеоморфизмом.

Мы начнем доказательство теоремы 9.17 с описания действия $X = X_{\mu, \nu}$ на связностях. Вообще говоря, диффеоморфизмы многообразий не поднимаются на расслоения. Однако поднятия инфинитезимальных образующих существуют всегда, и два таких поднятия отличаются на инфинитезимальный автоморфизм расслоения, накрывающий тождественное в малом отображение базы, т.е. на инфинитезимальное калибровочное преобразование. Так как в конечном итоге мы факторизуем по калибровочным преобразованиям и в любом случае интересуемся лишь нормами кривизны, которые не зависят от калибровки, то конкретный выбор поднятия не имеет никакого значения. Поэтому для определенности поднимаем X до горизонтального векторного поля $\tilde{X}$ на главном расслоении P , где «горизонтالي» задаются связностью D . Тогда поднятие $\tilde{X}$ действует на связностях, и в частности на D , по формуле

$$(9.19) \quad L_X D = [\tilde{X}, D].$$

Индукцированное действие на кривизну имеет вид

$$(9.20) \quad L_X F_D = [\tilde{X}, F_D] = D(L_X D).$$

Разумеется, действие X на метрику — это обычная производная Ли.

Запись действий X на D и F_D в виде производных Ли удобна по нескольким причинам. Например, с помощью дифференцирования Ли по переменным базы и отбрасывания переменных слоя вычисляются различные действия. Кроме того, скобочные обозначения и локальные координатные формулы вида

$$L_{\alpha^k \partial / \partial x^k} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = \left(\alpha^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j$$

позволяют читателю проследить, как получаются различные оценки. Обозначения в формуле (9.16), по-видимому, не требуют особых разъяснений: $\mathcal{D}^* \Phi_{\mu, \flat}$ — это решение уравнения

$$\mathcal{D} \mathcal{D}^* \Phi_{\mu, \flat} = -P_-(L_{X_{\mu, \flat}} F_D),$$

существование которого гарантируется теоремой 7.19.

Доказательство теоремы 9.17 разбивается на два шага. Сначала мы покажем, что отображение

$$\langle \mu, \flat \rangle \mapsto d\mathcal{B}_D(L_{X_{\mu, \flat}} D)$$

близко к тождественному отображению.

Предложение 9.21. Для дифференциала $d\mathcal{B}_D$ имеет место оценка

$$d\mathcal{B}_D(L_{X_{\mu, \flat}} D) = \langle \mu, \flat \rangle + O(\lambda^2) \cdot |\langle \mu, \flat \rangle|.$$

До конца этого раздела все нормы берутся относительно метрики g_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего мы можем ограничиться шаром $B_{4\lambda}$, поскольку отображение $\mathcal{B}$ определялось по данным, относящимся к этому шару. Пусть $F = F_D$, $X = X_{\mu, \flat}$, $\omega = \omega(D) = -\text{tr}(F \wedge *F) = |F|^2 * 1$; напомним, что $\mathcal{B}(D) = \ell(\omega, g)$. Таким образом, $d\mathcal{B}_D(L_X D) = d_\omega \ell \circ d\omega_D(L_X D)$. Очевидно, что

$$d\omega_D(L_X D) = -2 \text{tr}(F \wedge * L_X F).$$

Сравним это выражение с $L_X \omega$. Имеем

$$L_X \omega = -2 \text{tr}(F \wedge * L_X F) - \text{tr}(F \wedge L_X (*F)).$$

Следовательно,

$$(9.22) \quad d\mathcal{B}_D(L_X D) = d_\omega \ell(\omega, g)(L_X \omega + \text{tr}(F \wedge L_X (*F))).$$

Наша конструкция во введении к этому разделу была предназначена для того, чтобы получить формулу

$$(9.23) \quad d_\omega \ell(\omega, \delta)(L_{X_{\mu, \flat}} \omega) = \langle \mu, \flat \rangle$$

(см. (9.12)). Кроме того, по теореме 8.28

$$(9.24) \quad \|d_\omega \ell(\omega, g) - d_\omega \ell(\omega, \delta)\| = O(\delta^3).$$

Воспользуемся теперь гарантированной следствием 8.33 сходимостью в нормализованной модели $\bar{\Pi}$ к стандартному инстантону $\hat{I}_\lambda$ (8.26) при достаточно малых λ . Прямое вычисление показывает, что

$$(9.25) \quad \|L_X \omega\|_{L^1} \sim \|L_X \hat{I}_\lambda\|_{L^1} = O(1/\lambda) |\langle \mu, \flat \rangle|.$$

Комбинируя соотношения (9.23) – (9.25), мы получаем

$$(9.26) \quad d_\omega \ell(\omega, g)(L_X \omega) = \{d_\omega \ell(\omega, \delta) + [d_\omega \ell(\omega, g) -$$

$$-d_{\omega} \ell(\omega, \delta)]\}(L_X \omega) = \langle \mu, b \rangle + O(\lambda^2) |\langle \mu, b \rangle|.$$

Второе слагаемое в равенстве (9.22) оценивается по теореме 8.28:

$$(9.27) \quad |d_{\omega} \ell(\omega, g)(\text{tr}(F \wedge L_X(*)F))| \leq \\ \leq \|d_{\omega} \ell(\omega, g)\| \cdot \|F \wedge L_X(*)F\|_{L^1} = O(\lambda) \|F\|_{L^2} \cdot \|L_X(*)\|_{L^{\infty}}.$$

Здесь $* = *(g)$, и в экспоненциальных координатах на $B_{4\lambda}$

$$\|*(g) - *(\delta)\|_{C^0} = O(\lambda^2),$$

$$\|*(g) - *(\delta)\|_{C^1} = O(\lambda).$$

Векторное поле X конформно относительно метрики δ на $B_{4\lambda}$, а оператор $*$ конформно инвариантен на 2-формах. Следовательно, $L_X(*(\delta)) = 0$. Поэтому

$$(9.28) \quad \|L_X(*(\delta))\|_{L^{\infty}} = O(\lambda) |\langle \mu, b \rangle|,$$

и предложение 9.21 вытекает из (9.22), (9.26) – (9.28).

Чтобы завершить доказательство теоремы 9.17, нам осталось показать, что вклад от проекции Таубса в семейство (9.16) мал. Напомним, что этот вклад представляет собой решение уравнения

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^*\Phi_{\mu,b} = -P_-(L_X F).$$

Предложение 9.29. Имеет место равенство

$$d\mathcal{B}_D(\mathcal{D}^*\Phi_{\mu,b}) = O(\lambda) |\langle \mu, b \rangle|.$$

Доказательство. По теореме 8.30 для $\Phi = \Phi_{\mu,b}$ справедливо неравенство

$$\|d\mathcal{B}_D(\mathcal{D}^*\Phi)\| \leq c_{28} \lambda \|\mathcal{D}\mathcal{D}^*\Phi\|_{L^2}.$$

Согласно 7.18, $\|D\mathcal{D}^*\Phi\|_{L^2}$ оценивается $\mathcal{H}(D)$ -нормой Φ :

$$\|D\mathcal{D}^*\Phi\|_{L^2} \leq c_{36} \|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)},$$

а по теореме 7.19

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(D)} \leq c_{18} \|P_-(L_X F)\|_{L^2}.$$

Поэтому, чтобы доказать предложение 9.29, достаточно оценить $\|P_-(L_X F)\|_{L^2}$ нормой $|\langle \mu, \mathfrak{b} \rangle|$.

Пусть ψ_t — однопараметрическая группа, порожденная векторным полем X . Тогда связность $\psi_t^*(D)$ автодуальна в метрике $\psi_t^*(g)$, что инфинитезимально выражается соотношением

$$P_-(L_X F) = -(L_X P_-)F.$$

Значит, нам нужно всего лишь оценить $\|(L_X P_-)F\|_{L^2}$. Заметим, что из конформной инвариантности оператора Ходжа $*$ на 2-формам следует неравенство

$$|L_X P_-| \leq c_{37} |\pi(L_X g)|,$$

где π — проекция на бесследовую часть.

Для сдвигов ($\mu = 0$) нет никаких проблем, поскольку

$$\|L_{X_{\mathfrak{b}}} P_-\|_{L^\infty} \leq c_{38} |\mathfrak{b}|$$

и

$$\|F\|_{L^2} = 8\pi^2.$$

Но для растяжений существует дополнительный множитель $1/\lambda$, т.е.

$$|L_{X_\mu} P_-|(x) = O(|x|^2) \mu/\lambda,$$

и нам придется немного поработать. Именно здесь в игру вступает оценка распада (9.8):

$$|F|(x) \leq \frac{c_{39} \lambda^\gamma}{|x|^{2+\gamma}}, \quad K\lambda \leq |x| \leq \rho.$$

Учитывая эту оценку, мы имеем

$$\begin{aligned} \|P_-(L_{X_\mu} F)\|_{L^2}^2 &\leq c_{40} \left\{ \int_0^{K\lambda} r^4 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 |F|^2 * 1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{K\lambda}^\rho r^4 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda^{2\gamma}}{r^{4+2\gamma}} r^3 dr \right\} = O(\lambda^2) + O(\lambda^{2\gamma-2}) = \\ &= O(\lambda^{2\gamma-2}). \end{aligned}$$

Полагая в неравенстве (9.8) $\gamma \geq 1$, мы получаем требуемый результат.

Наконец, оценки из предложений 9.21 и 9.29 показывают, что при достаточно малых λ

$$\|d\mathcal{B}_D \circ \Sigma_{\mu, \mathfrak{b}}\| > 0$$

для всех точек $\langle \mu, \mathfrak{b} \rangle$. Следовательно, отображение $d\mathcal{B}_D \circ \Sigma$ является обратимым, что и требовалось доказать.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ КАЛИБРОВКИ

В предыдущем разделе мы установили, что $\overline{\mathcal{B}}$ — накрывающее отображение (см. введение к этой главе); покажем теперь, что $\overline{\mathcal{B}}$ взаимно однозначно. Начнем с того, что, используя оценку распада на шейке инстантона, найдем калибровку, в которой $D = d + A$ с малой нормой $|A|$. Для этого нам понадобится новое техническое средство — так называемая экспоненциальная калибровка [U2]. В этом разделе мы построим ее сначала в общем контексте векторного расслоения ξ с метрикой и связностью D над римановым многообразием M . Идея заключается в возможности геометрического выбора для связности D с ма-

лой по норме кривизной F_D локальной калибровки с малой $|A|$. (Ранее, в теореме 8.2, это делалось с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.) Для связностей на касательном расслоении это построение осуществляется с использованием геодезических нормальных координат. В общем случае, имея дело с произвольными расслоениями, мы должны совершать параллельные переносы вдоль радиальных геодезических в расслоении. С этой целью мы вводим геодезические нормальные координаты в тотальном пространстве расслоения, которое превращено в риманово многообразие с помощью метрики на базе, метрики на слое и связности.

Итак, возьмем точку $p \in M$ и построим локальную тривиализацию расслоения ξ , отождествляя $\xi_{\exp_p(tX)}$ и ξ_p с помощью параллельного переноса вдоль радиальной геодезической $\{\exp_p(zX), 0 \leq z \leq t\}$ для каждого единичного вектора $X \in T_p M$ и малого t . Выберем репер в точке p . При этом остается свобода поворота на фиксированный элемент структурной группы G , подобно тому как геодезические оснащения касательного расслоения выбираются с точностью до линейного преобразования, не зависящего от координат базы. Тогда $D = d + A$, причем $A_z = 0$ в геодезических полярных координатах $\langle r, \theta \rangle$, $\theta \in S^{n-1}$. Следовательно,

$$F_{r\theta} = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + [A_r, A_\theta] = \frac{\partial A_\theta}{\partial r},$$

так что

$$(9.30) \quad A_\theta(r_0, \theta_0) = \int_0^{r_0} F_{r\theta}(r, \theta_0) dr.$$

Мы построили калибровку, в которой связность выражается в терминах кривизны. Поэтому формулу (9.30) можно использовать для оценки A в терминах F , если принять во внимание метрику на базе $dr^2 = r^2 + (1 + O(r^2))d\theta^2$. На области, отделенной от множества раздела, вклад этой метрики ограничен и

$$(9.31) \quad \|A\|_{L^\infty(B_r)} \leq c_{41} \|F\|_{L^\infty(B_r)},$$

где постоянная $c_{41} = c_{41}(\gamma)$ стремится к бесконечности, когда мы приближаемся к множеству раздела. Если фиксировать калибровку на подмногообразии S , то на геодезических, нормальных к S , возникает трансверсальная калибровка и неравенство (9.31) принимает вид

$$(9.32) \quad \|A\|_{L^\infty(S_\gamma)} \leq \|A\|_{L^\infty(S)} + c_{42}(\gamma) \|F\|_{L^\infty(S_\gamma)},$$

где c_{42} стремится к бесконечности по мере приближения к фокальным точкам. Здесь S_γ — трубчатая окрестность подмногообразия S в M .

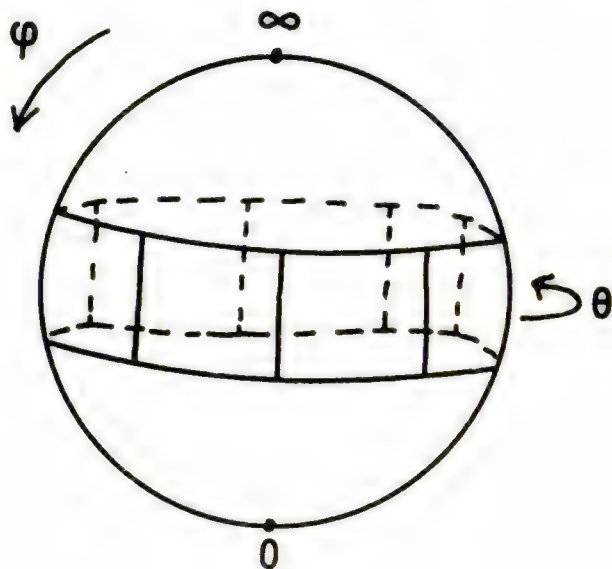
Экспоненциальные (или трансверсальные) калибровки, локализованные в различных точках, могут быть склеены вместе, если пересечения имеют достаточно простую геометрию. Проиллюстрируем это следующим утверждением.

Предложение 9.33 [U2]. Пусть D — связность в расслоении над сферой S^n . Если норма $\|F\|_{L^\infty(S^n)}$ достаточно мала, то на S^n существует глобальная калибровка, в которой $D = d + A$ с

$$\|A\|_{L^\infty(S^n)} \leq c_{43} \|F\|_{L^\infty(S^n)},$$

где c_{43} — константа, не зависящая от D .

Доказательство. Рассмотрим окрестности южного полюса 0 и северного полюса ∞ сферы S^n , каждая из которых представляет собой полусферу, продолженную за экватор, и построим на этих окрестностях экспоненциальные калибровки:



Получившиеся при этом формы связности A^0, A^∞ удовлетворяют неравенству (9.31), где константа c_{41} зависит только от геометрии сферы. На пересечении $D = d^0 + A^0 = d^\infty + A^\infty$, так что A^0 и A^∞ связаны калибровочным преобразованием

$$(9.34) \quad z^{-1} d^0 z = A^0 - A^\infty.$$

По построению, экспоненциальная калибровка обращается в нуль в «радиальном направлении», которое в нашем случае задается полярным углом φ . Отсюда следует, что

$$\frac{dz}{d\varphi} = z(A_\varphi^\infty - A_\varphi^0) = 0.$$

Таким образом, $z = z(\theta)$ является функцией только экваториальных переменных. Предположим для удобства, что преобразование z унитарно. Тогда из (9.34) и (9.31) следует оценка

$$(9.35) \quad \|dz\|_{L^\infty} \leq 2c_{41} \|F\|_{L^\infty}.$$

Воспользуемся теперь свободой поворота репера при помощи фиксированного элемента калибровочной группы и устроим так, чтобы $z(\theta_0) = 1$ для некоторого значения θ_0 экваториальных переменных. Тогда, интегрируя неравенство (9.35), получаем

$$(9.36) \quad \|z\|_{L^\infty} \leq c_{41} \pi \|F\|_{L^\infty}.$$

Если норма $\|F\|_{L^\infty}$ достаточно мала (величина малости здесь определяется геометрией калибровочной группы G), то $z(\theta)$ можно представить в виде

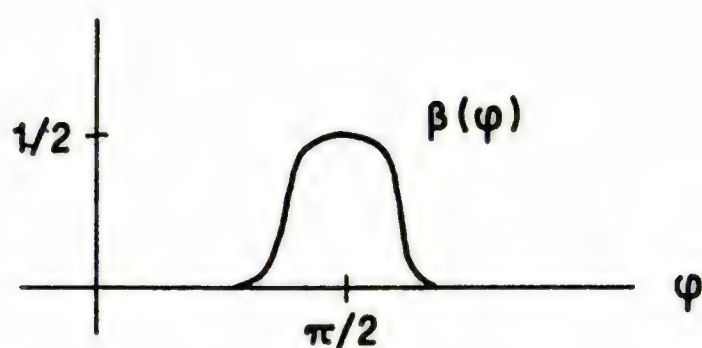
$$z(\theta) = \exp(u(\theta))$$

для некоторого $u: S^{n-1} \rightarrow \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G . Из неравенств (9.35) и (9.36) вытекают следующие оценки:

$$(9.37) \quad \|u\|_{L_1^\infty} \leq c_{44} \|z\|_{L_1^\infty} \leq c_{41} c_{44} \pi \|F\|_{L^\infty},$$

где $c_{44} = c_{44}(G, \text{dist}(z(\theta), 1))$. Пусть $\beta(\varphi)$ — такая срезающая функция на пересечении окрестностей, что $\beta(\pi/2) = 1/2$

и ограничена норма $|d\beta|$:



Используя отображения

$$z^0(\varphi, \theta) = \exp(\beta(\varphi)u(\theta)),$$

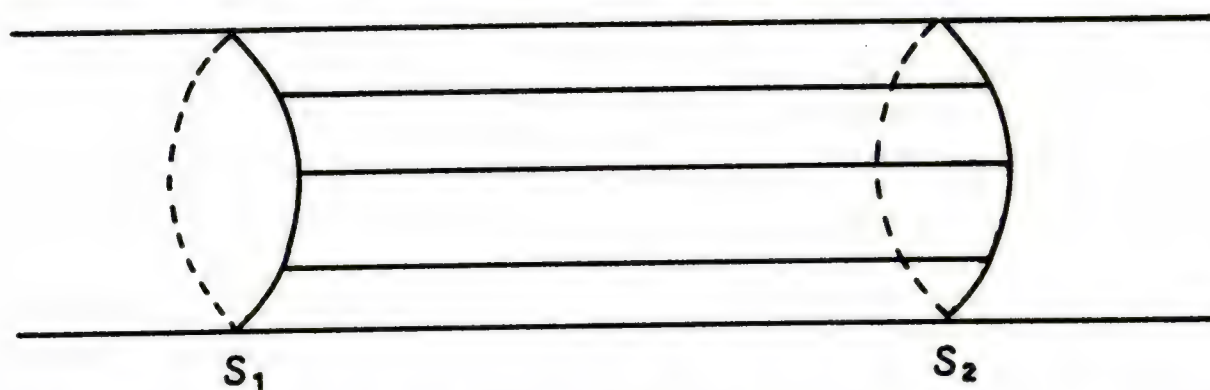
$$z^\infty(\varphi, \theta) = \exp(-\beta(\varphi)u(\theta)),$$

мы можем так подобрать калибровки, чтобы связность D глобально представлялась в виде $D = d + A$ с

$$A = A^0 - (z^0)^{-1}(d^0 z^0) = A^\infty - (z^\infty)^{-1}(d^\infty z^\infty).$$

Данная в предложении 9.33 оценка легко следует из неравенств (9.31) и (9.37).

Описанную технику можно с успехом применить для склеивания трансверсальных калибровок на цилиндре, где, так же как на сфере, проста геометрия пересечения. В общем случае склеивание не связано ни с какими свойствами пересечения.



Возвращаясь к локализованному инстантону D , построим хорошую калибровку на шейке. Положим $\bar{\tau}_\lambda = (\tau_0 + \tau_\lambda)/2$.

Предложение 9.38. Для $K \geq K_2$ на N_λ существует такая калибровка, что $D = d + A$ с

$$|A|(\tau, \theta) \leq \frac{c_{35} \nu e^{-\bar{\tau}_\lambda}}{\gamma} (c_{45} + e^{-\gamma|\bar{\tau}_\lambda - \tau|}).$$

В частности,

$$\|A\|_{L^\infty(N_\lambda)} \leq c_{46} \nu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как метрика на N_λ близка к цилиндрической, то ценою малого изменения констант можно пользоваться этой цилиндрической метрикой. Применяя предложение 9.33 к сфере S^3 в точке $\tau = \bar{\tau}_\lambda$, мы получаем калибровку, в которой с учетом оценки распада (9.8) выполняется неравенство

$$(9.39) \quad |A|(\bar{\tau}_\lambda, \theta) \leq c_{35} c_{43} \nu e^{-\gamma \bar{\tau}_\lambda}.$$

Перейдем теперь к трансверсальной калибровке ($A_\tau = 0$) на N_λ (так как на N_λ нет фокальных точек, то беспокоиться не о чем). Тогда, точно так же как в (9.30),

$$A_\theta(\tau, \theta_0) = A_\theta(\bar{\tau}_\lambda, \theta_0) + \int_{\bar{\tau}_\lambda}^{\tau} F_{\tau\theta}(\sigma, \theta_0) d\sigma,$$

откуда с помощью интегрирования и оценок (9.8), (9.39) следует требуемое утверждение. Предложение 9.38 доказано.

$$\text{С л е д с т в и е 9.40. } \|A\|_{L^4(N_\lambda)} \leq c_{47} \nu.$$

Заметим, что так как $\nu \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, то для больших K правые части неравенств (9.38) и (9.40) становятся произвольно малыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проинтегрировать неравенство (9.38).

Здесь $D_\lambda^{S^4}$ — основной локализованный инстантон масштаба λ , перенесенный на нашу раздутую модель, и d — тривиальная связность в некоторой калибровке. Для ясности мы включили в формулы (9.42) обозначения калибровочных преобразований. Соотношение (9.43) следует из сходимости к стандартному инстантону (8.33) и того факта, что масштабный множитель, появляющийся при переходе от L^∞ -оценок относительно $\mathcal{G}_2$ к оценкам относительно $\mathcal{G}_3$ на шаре $B_{K\lambda}$, ограничен числом K . Неравенство (9.44) получается из оценок (9.38) и (9.40) с учетом предложения 9.4. Соотношение (9.45) вытекает из следствия 8.35.

Теперь мы в состоянии закончить доказательство того, что $\bar{\mathcal{P}}$ — диффеоморфизм. Пусть $\bar{D}_\lambda, \bar{D}'_\lambda$ — такие кривые в $\mathcal{M}$, что $\bar{\mathcal{P}}(\bar{D}_\lambda) = \bar{\mathcal{P}}(\bar{D}'_\lambda) = \langle \lambda, x \rangle$ для пробегающих интервал значений λ и некоторой фиксированной точки $x \in M$.

Предложение 9.46. Для $\lambda \leq \lambda_7, K \geq K_3$ существуют поднятия D_λ, D'_λ , разность A_λ которых удовлетворяет условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|A_\lambda\|_{L^4} \leq \frac{C_{48}}{K^2}.$$

С учетом этого предложения теорема о воротнике будет следовать из теоремы 7.30.

Доказательство. Соотношения (9.43) — (9.45) в совокупности с неравенством треугольника гарантируют существование таких поднятий D_λ, D'_λ и калибровочных преобразований z_λ^N, z_λ^M на N_λ, M_0 , что

$$\begin{aligned} D'_\lambda &= D_\lambda + A_\lambda^I && \text{на } I_\lambda, \\ (9.47) \quad (z_\lambda^N)^* D'_\lambda &= D_\lambda + A_\lambda^N && \text{на } N_\lambda, \\ (z_\lambda^M)^* D'_\lambda &= D_\lambda + A_\lambda^M && \text{на } M_0, \end{aligned}$$

где

$$(9.48) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|A_{\lambda}^I\|_{I_{\lambda}} = 0,$$

$$(9.49) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|A_{\lambda}^N\|_{N_{\lambda}} \leq \frac{2c_{30}(c_{46} + c_{47})}{K^2},$$

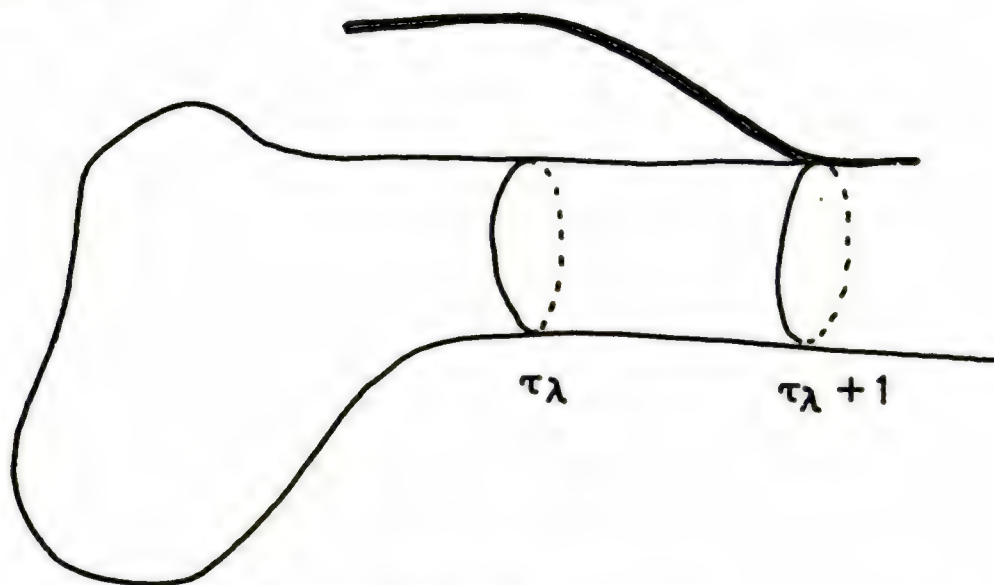
$$(9.50) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|A_{\lambda}^M\|_{M_0} = 0.$$

Займемся теперь склейкой, взяв за образец предложение 9.33, но на сей раз не ограничиваясь только экспоненциальными калибровками. Мы наметим доказательство лишь для пересечения $I_{\lambda} \cap N_{\lambda}$.

Прежде всего из соотношений (9.47) следует, что на пересечении $I_{\lambda} \cap N_{\lambda}$ имеет место равенство

$$(9.51) \quad D'_{\lambda} z = z(A_{\lambda}^N - A_{\lambda}^I),$$

где мы положили $z = z_{\lambda}^N$. Взяв число K достаточно большим, можно сделать $z(A_{\lambda}^N - A_{\lambda}^I)$ произвольно малым по норме. Кроме того, связность D'_{λ} является почти плоской на $I_{\lambda} \cap N_{\lambda}$, поэтому равенство (9.51) дает оценку на dz . Далее, поворачивая z с помощью постоянного элемента из $SU(2)$, мы можем добиться того, что z станет тождественным преобразованием где-нибудь на $I_{\lambda} \cap N_{\lambda}$, не затрагивая оценок. Значит, мала норма $\|z\|_{L_1^{\infty}(I_{\lambda} \cap N_{\lambda})}$, и мы можем представить z в виде $z = e^u$, точно так же, как в предложении 9.33. Введем срезающую функцию φ :



и заменим z_{λ}^N в соотношении (9.47) на $e^{\varphi u}$. Тогда на шейке N_{λ}

$$(e^{\varphi u})^* D'_\lambda = D_\lambda + t^{-1} D_\lambda t + t^{-1} A_\lambda^N t, \quad t = e^{(\varphi-1)u},$$

и для $\bar{D}'_\lambda$ на $I_\lambda \cup N_\lambda$ согласованным образом определено поднятие $\tilde{D}'_\lambda$, задаваемое правилом

$$\tilde{D}'_\lambda = \begin{cases} D'_\lambda & \text{на } I_\lambda, \\ (e^{\varphi u})^* D'_\lambda & \text{на } N_\lambda. \end{cases}$$

Так как можно считать абсолютную величину $|\alpha\varphi|$ ограниченной и у нас есть оценки нормы и в L_1^p ($p = 4, \infty$), то для полученного поднятия справедливы соотношения вида (9.48) и (9.49).

Повторяя это рассуждение для пересечения $N_\lambda \cap M_0$, находим глобальную калибровку. Собирав вместе все оценки, мы получаем предложение 9.46.

Докажем теперь, что слои отображения $\bar{\mathcal{B}}$ являются связными множествами.

Т е о р е м а 9.52. Если $\lambda \leq \lambda_8$ и $K \geq K_4$, то

$$D_\lambda = D'_\lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем число K настолько большим, чтобы были выполнены условия теоремы 7.30. В результате мы получим путь $D_{t,\lambda}$ с $D_{0,\lambda} = D_\lambda$ и $D_{1,\lambda} = D'_\lambda$. Кроме того, из сходимости к стандартному инстантону (8.33) на I_λ и из следствия 8.35 вытекают соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|F'_\lambda - F_\lambda\|_{L^2(I_\lambda)} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|F'_\lambda - F_\lambda\|_{L^2(M_0)} = 0.$$

Оценка распада (9.8), проинтегрированная по N_λ , дает

$$\|F'_\lambda - F_\lambda\|_{L^2(N_\lambda)} \leq \frac{C_{49}}{K^2}.$$

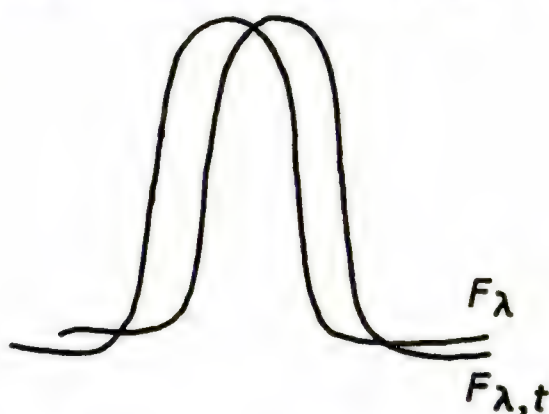
Поэтому из оценки на кривизну, данной в теореме 7.30, следует, что

$$\|F_{t,\lambda} - F_\lambda\|_{L^2(M)} \leq \frac{C_{50}}{K^2}$$

и норма $\|F_{t,\lambda} - F_\lambda\|_{L^2(M)}$ мала при малых λ , скажем при $\lambda \leq \lambda_8$. Так как локализованная и нелокализованная кривизны отличаются в пространстве L^2 почти на $16\pi^2$



то путь $\{\bar{D}_{t,\lambda}, 0 \leq t \leq 1\}$ для больших K остается в воротнике $\mathcal{M}_{\lambda_8}$. Кроме того, $\text{dist}(x(\bar{D}_{t,\lambda}), x(\bar{D}_\lambda)) < \lambda$, поскольку шар $B_\lambda(x(\bar{D}_\lambda))$ содержит примерно $4\pi^2$ -кратную L^2 -энергию. Значит, локализованные инстантоны с мало отличающимися кривизнами имеют близкие центры:



Следовательно, путь $\bar{D}_{t,\lambda}$ в $\mathcal{M}_{\lambda_8}$ является коротким. Поскольку $\bar{\mathcal{B}}$ — локальный диффеоморфизм (9.18), мы видим, что $\bar{D}_\lambda = \bar{D}'_\lambda$.

Итак, $\bar{\mathcal{B}}$ — взаимно однозначный локальный диффеоморфизм и, следовательно, глобальный диффеоморфизм. Этим наконец-то завершается доказательство теоремы 9.1, а вместе с ней и теоремы Дональдсона.

Глава 10

ТЕХНИКА ФИНТУШЕЛА И СТЕРНА

В конце гл. 2 мы отмечали, что при изучении пространства модулей автодуальных связностей для G -расслоения над многообразием M на G и M налагаются три топологических условия — требуется, чтобы форма пересечений ω была положительно определенной, первое число Бетти b_1 обращалось в нуль и группа G была трехмерной. При ослаблении любого из этих требований появляются серьезные трудности. Американские топологи Рональд Финтушел и Рональд Стерн показали, что для группы $G = SO(3)$, т.е. для ориентированных трехмерных вещественных векторных расслоений, имеет место теорема, отличная от теоремы Дональдсона. Вытекающий из нее результат о несглаживаемости справедлив для компактных ориентированных четырехмерных многообразий с почти любой конечной фундаментальной группой, зато класс форм пересечений таких многообразий довольно ограничен. (Теорема Финтушела — Стерна применима к форме $E_8 \oplus E_8$, откуда, как и прежде, следует существование фальшивого $\mathbb{R}^4$.) Одно из достоинств их подхода — значительно более простой аналитический аппарат. Поскольку результаты Финтушела и Стерна имеют важное значение для топологии трехмерных многообразий, мы изложим в этой главе «легкий» случай их теоремы. Трудности в остальных случаях носят не аналитический характер, а связаны главным образом с теоретико-числовыми свойствами формы пересечений, но мы дадим достаточно информации для того, чтобы читатель смог самостоятельно восполнить пропущенные детали.

ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ ДЛЯ $SO(3)$ -РАССЛОЕНИЙ

Напомним прежде всего некоторые топологические свойства $SO(3)$ -расслоений (см. приложение E). Существуют два характеристических класса, которые полностью описывают $SO(3)$ -расслоения ξ над компактными ориентированными четырехмерными многообразиями. Этими классами служат второй класс Штифеля – Уитни $w_2(\xi) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ и первый класс Понтрягина $p_1(\xi) \in H^4(M; \mathbb{Z})$. Обозначим через ℓ число Понтрягина $p_1(\xi)[M]$. Если F – кривизна некоторой связности, заданной в расслоении ξ , то имеет место формула Чжэня – Вейля

$$(10.1) \quad \ell = p_1(\xi)[M] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F).$$

Заметим, что если форма кривизны F автодуальна, то $\ell \geq 0$. Если характеристический класс $w_2(\xi)$ обращается в нуль, то ξ может быть реализовано как (вещественное) присоединенное расслоение к $SU(2)$ -расслоению η и в этом случае $\ell = 4k$, где $k = -c_2(\eta)[M]$. (Следовательно, чтобы получить пространство модулей, которое не происходит из $SU(2)$ -расслоений, нужно расслоение ξ с $w_2(\xi) \neq 0$.) Отметим, что для $SO(3)$ -расслоений имеет место изоморфизм $\text{ad } \xi \cong \xi$. Предположим теперь, что ξ – приводимое (или расщепляющееся) расслоение. Это означает, что

$$\xi = \lambda \oplus \varepsilon \quad (\text{ортогональная прямая сумма}),$$

где λ – расслоение со структурной группой $SO(2) = U(1)$, т.е. ориентированное вещественное расслоение ранга 2, или, что то же самое, комплексное линейное расслоение, а ε – тривиальное ориентированное вещественное линейное расслоение. Вспоминая, что w_2 и p_1 – стабильные характеристические классы, вычислим их для приводимого расслоения ξ (см. [MS]):

$$(10.2) \quad \begin{aligned} w_2(\xi) &= w_2(\lambda) = c_1(\lambda) \pmod{2} \in H^2(M; \mathbb{Z}_2), \\ p_1(\xi) &= p_1(\lambda) = c_1(\lambda)^2 - 2c_2(\lambda) = c_1(\lambda)^2 \in H^4(M; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Изучим теперь пространство $\mathcal{M}$ модулей автодуальных связностей в расслоении ξ . Теорема Атьи - Зингера об индексе показывает, что

$$(10.3) \quad \dim \mathcal{M} = 2\ell - 3(1 - b_1 + b_2^-).$$

(Это в точности формула (2.29).) Воспользуемся той же схемой, которая применяется для доказательства теоремы Дональдсона (см. гл. 2).

Т е о р е м а 10.4. Пусть ξ - некоторое $SO(3)$ -расслоение над компактным ориентированным четырехмерным многообразием M с положительно определенной формой пересечений ω и с $b_1(M) = 0$. Предположим, что $\ell = p_1(\xi)[M] = 2$. Тогда пространство $\mathcal{M}$ модулей автодуальных связностей в ξ обладает следующими свойствами.

I. Пусть m - половина числа решений уравнений

$$\omega(\alpha, \alpha) = 2,$$

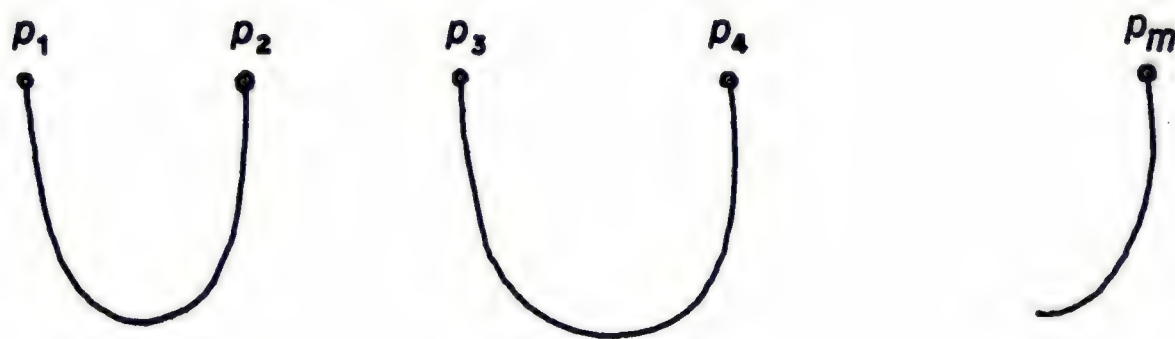
(10.5)

$$\alpha \pmod{2} = w_2(\xi).$$

Тогда для почти всех метрик на M в пространстве модулей $\mathcal{M}$ существуют такие точки $p_1, p_2, \dots, p_m$, что $\mathcal{M} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ является гладким одномерным многообразием.

II. Для почти всех метрик на M существуют такие окрестности $\mathcal{O}_{p_i}$ точек p_i , что $\mathcal{O}_{p_i}$ представляет собой луч (т.е. конус $\mathbb{C}/S^1$ над точкой).

III. Пространство $\mathcal{M}$ компактно.



Единственное осложнение относится к свойству $\bar{I}$ и связано с вычислением числа решений уравнений (10.5) в случае, когда группа $H^2(M; \mathbb{Z})$ имеет кручение. Поэтому мы ввели дополнительное условие $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ (см. (E.1)); разобраться в том, что происходит при $H_1(M; \mathbb{Z}) \neq 0$, предоставляем читателям в качестве упражнения. Заметим лишь, что точное требование на $H_1(M; \mathbb{Z})$ заключается в отсутствии 2^z -кручения при $z \geq 2$. Например, очевидно, что группа $\mathbb{Z}_2$ не доставляет хлопот. Здесь, так же как в теореме Дональдсона, расщепляющимся расслоениям соответствуют особые точки (в данном случае краевые точки). Некоторая осторожность требуется при проверке того, какие расщепляющиеся связности Янга – Миллса эквивалентны относительно действия калибровочных преобразований.

Теперь мы сформулируем тот вариант теоремы Финтушела и Стерна, который будет доказан подробно.

Т е о р е м а 10.6 (Финтушел и Стерн [FS]). Пусть M – компактное ориентированное четырехмерное топологическое многообразие с положительно определенной формой пересечений ω и $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$. Если существует класс когомологий $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$, удовлетворяющий условию $\omega(\alpha, \alpha) = 2$ и такой, что $\alpha \neq \beta + \gamma$, где $\omega(\beta, \beta) = \omega(\gamma, \gamma) = 1$, то многообразие M не сглаживаемо.

В частности, этому условию удовлетворяет форма $E_8 \oplus E_8$, и, следовательно, не сглаживаемо многообразие $|E_8 \oplus E_8|$. Однако многие положительно определенные формы пересечений не принимают значение 2. Например, 24-мерная решетка Лича имеет минимальные векторы длины 4, и тензорное произведение $E_8 \otimes \dots \otimes E_8$ (3 раз) принимает минимальное значение, равное 2^3 . Поэтому сформулированное утверждение не охватывает всех случаев теоремы Дональдсона. Заметим, что в работе Финтушела и Стерна имеется отдельное рассуждение для форм пересечений с минимальным значением 3. (Одна из трудностей для больших минимальных значений состоит в том, что пространство M перестает быть компактным.)

Докажем теперь теорему 10.6, предполагая, что для простран-

ства модулей $\mathcal{M}$ выполнены свойства $\bar{\text{I}} - \bar{\text{III}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 10.6. Рассмотрим $SO(2)$ -расслоение λ с $c_1(\lambda) = \alpha$ и соответствующее $SO(3)$ -расслоение $\xi = \lambda \oplus \varepsilon$. Тогда для почти любой метрики на M пространство модулей $\mathcal{M}$ является компактным одномерным многообразием с m краевыми точками, где m — половина числа решений уравнений (10.5). Теорема будет доказана, если мы установим, что единственными решениями этих уравнений являются классы когомологий $\pm\alpha$. В этом случае многообразие $\mathcal{M}$ имело бы всего лишь одну краевую точку, и это противоречило бы его компактности.

Итак, рассмотрим какое-либо решение уравнений (10.5). Его можно представить в виде $\alpha + 2\beta$, причем

$$2 = \omega(\alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta) = 2 + 4\omega(\alpha, \beta) + 4\omega(\beta, \beta),$$

или

$$\omega(\alpha, \beta) + \omega(\beta, \beta) = 0.$$

Но тогда

$$0 \leq \omega(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 2 - \omega(\beta, \beta),$$

откуда следует, что $\omega(\beta, \beta) \leq 2$. Если $\omega(\beta, \beta) = 0$, то $\beta = 0$, поскольку форма ω невырождена. Если $\omega(\beta, \beta) = 2$, то $\omega(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$, и на сей раз из невырожденности вытекает, что $\beta = -\alpha$. Это дает решение $\alpha - 2\alpha = -\alpha$, которое уже упоминалось выше. Наконец, если $\omega(\beta, \beta) = 1$, то и $\omega(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = 1$, так что $\alpha = \beta + \gamma$ с $\gamma = \alpha - \beta$. Но это запрещено условием теоремы, поэтому $m = 1$, как и требовалось.

ПРИВОДИМЫЕ СВЯЗНОСТИ

Точно так же, как в теореме Дональдсона, из расщеплений $\xi =$

$= \lambda \oplus \varepsilon$ получаются специальные решения уравнений Янга – Миллса для группы $SO(3)$. На расслоении ε задана тривиальная, плоская, связность, а на $SO(2)$ -расслоении λ – связность Янга – Миллса (кривизной которой служит умноженная на $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ единственная гармоническая 2-форма $\not{f}$, представляющая первый класс Чжэня $c_1(\lambda)$). Поскольку $SO(2) = U(1)$, полученные нами в гл.2 результаты о комплексных линейных расслоениях применимы к λ .

Предложение 10.7. Пусть m – половина числа решений уравнений (10.5) и ξ – расслоение со структурной группой $SO(3)$, первым числом Понтрягина $\ell = 2$ и заданным классом Штифеля – Уитни $w_2(\xi)$. Тогда на ξ существует ровно m расщепляющихся автодуальных связностей (с точностью до калибровочной эквивалентности).

Напомним, что если $\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$, то $m = 1$ (см. предыдущую теорему).

Доказательство. Расслоение ξ топологически расщепляется в прямую сумму $\xi = \lambda \oplus \varepsilon$ тогда и только тогда, когда первый класс Чжэня $c_1(\lambda) = \infty$ удовлетворяет уравнениям (10.5). Кроме того, описанные выше связности являются связностями Янга – Миллса на ξ . Поэтому нам нужно лишь установить, какие связности отождествляются при действии группы калибровочных преобразований.

Докажем сначала, что связности, отвечающие классам когомологий ∞ и $-\infty$, калибровочно эквивалентны. Рассмотрим $SO(2)$ -расслоение, соответствующее классу $-\infty$, которое мы обозначим через $-\lambda$. Оно имеет то же подстилающее вещественное расслоение ранга 2, что и λ , но наделено противоположной ориентацией. Другими словами, хотя λ и $-\lambda$ различны как $SO(2)$ -расслоения, они канонически эквивалентны как $O(2)$ -расслоения, т.е. неориентированные вещественные расслоения ранга 2; эта эквивалентность задается обращением ориентации. Более того, эта эквивалентность переводит связности Янга – Миллса в связности Янга – Миллса (в то время как кривизна $i\not{f}$ пере-

ходит в $-i\mathcal{f}$). Продолжим нашу эквивалентность до отображения $\lambda \oplus \varepsilon \rightarrow (-\lambda) \oplus \varepsilon$, обращая ориентацию на тривиальном расслоении ε . Тогда ориентация всего расслоения ξ сохраняется. Следовательно, мы построили автоморфизм $SO(3)$ -расслоений (калибровочное преобразование), переводящее связность, отвечающую классу α , в связность, отвечающую классу $-\alpha$.

Предположим теперь, что α_1 и α_2 — решения уравнений (10.5), причем $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$. Пусть $\xi = \lambda_1 \oplus \varepsilon_1 = \lambda_2 \oplus \varepsilon_2$ — отвечающие им расщепления. Кривизны наших расщепляющихся связностей Янга — Миллса принимают вид $F_j = i\mathcal{f}_j \cdot \mathcal{U}_j$ ($j = 1, 2$), где $\mathcal{f}_j$ — однозначно определенная гармоническая форма, представляющая класс когомологий α_j , и $\mathcal{U}_j$ — положительно ориентированное единичное векторное поле на ε_j (с учетом отождествления $\text{ad } \xi \cong \xi$). Если две связности калибровочно эквивалентны, то калибровочно эквивалентны и их кривизны. Но калибровочные преобразования не влияют на формы $\mathcal{f}_j$ и всего лишь поворачивают векторные поля $\mathcal{U}_j$ внутри ξ . Значит, кривизна F_1 может быть эквивалентной кривизне F_2 лишь в том случае, когда $\mathcal{f}_1 = \pm\mathcal{f}_2$. Если группа $H^2(M; \mathbb{Z})$ не содержит кручения, то $\alpha_1 = \pm\alpha_2$ и мы приходим к предыдущему случаю. Следовательно, можно считать, что класс когомологий $\alpha_1 \neq \alpha_2$ имеет конечный порядок в $H^2(M; \mathbb{Z})$. Если F_1 и F_2 калибровочно эквивалентны, то найдется калибровочное преобразование, переводящее $\mathcal{U}_1$ в $\pm\mathcal{U}_2$ и, стало быть, отображающее ортогональное дополнение λ_1 на $\pm\lambda_2$. Отсюда следует, что $\lambda_1 \cong \pm\lambda_2$, что противоречит предположению $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$. Значит, если $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$, расщепляющиеся связности Янга — Миллса не могут быть эквивалентными. Предложение 10.7 доказано.

Сформулируем теперь для полноты аналог теоремы 3.1. Заметим, что группа $SO(3)$ не имеет центра; следовательно, в этом случае не появляется подгруппа $\mathbb{Z}_2$. Напомним, что $SO(3)$ -связность $D \in \mathcal{A}$ называется приводимой (или расщепляющейся), если $\xi = \lambda \oplus \varepsilon$ и $D = \alpha_1 \oplus \alpha$.

Т е о р е м а 10.8. Предположим, что связность D не является плоской. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- (a) $\mathfrak{G}_D \simeq SO(2)$, где $\mathfrak{G}_D \subseteq \mathfrak{G}$ — стационарная подгруппа связности D ;
- (b) оператор $D: \Omega^0(\text{ad } \xi) \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \xi)$ имеет ненулевое ядро;
- (c) связность D приводима;
- (d) $\mathfrak{G}_D \neq 1$.

Доказательство этой теоремы почти полностью совпадает с доказательством теоремы 3.1; несколько иначе получается лишь импликация $(b) \Rightarrow (c)$. Отождествим расслоения $\text{ad } \xi$ и ξ . Если $Du = 0$ для некоторого $u \in \Omega^0(\text{ad } \xi) = \Omega^0(\xi)$, то, поскольку $d|u|^2 = 2(Du, u) = 0$, можно считать, что $|u| = 1$. Определим расслоение ε как ядро u (в $\text{ad } \xi$ оно отождествляется с подрасслоением $\mathbb{R} \cdot u$). Ортогональным дополнением $\varepsilon^\perp$ к расслоению ε служит λ , и стационарная подгруппа $\mathfrak{G}_D$ имеет вид

$$\mathfrak{G}_D = SO(2) = \{e^{i\theta u}: 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Всё остальное как в теореме 3.1.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДЕТАЛИ

Хотя теоремы трансверсальности (гл. 3 и 4) были получены нами только для $SU(2)$ -расслоений, все шаги доказательств дословно переносятся на $SO(3)$ -расслоения. Центральным моментом в обеих теоремах трансверсальности является доказательство того, что двумерные группы когомологий эллиптического комплекса

$$0 \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \xi) \xrightarrow{D} \Omega^1(\text{ad } \xi) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Omega_-^2(\text{ad } \xi) \rightarrow 0$$

обращаются в нуль для почти всех метрик. Полностью повторяется доказательство того, что нетривиальные нульмерные когомологии соответствуют геометрическим расщеплениям расслоения. Одним словом, чтобы получить теоремы трансверсальности для $SO(3)$ -расслоений, достаточно сослаться на теоремы 3.17, 4.9 и 4.19. Заметим, что две последние теоремы, устанавливающие существо-

вание неприводимых связностей в окрестности каждой приводимой связности, основываются на теореме о неявной функции.

Теорема компактности для $SO(3)$ -расслоений несколько отличается от соответствующей теоремы для $SU(2)$ -расслоений, поэтому мы дадим краткий набросок ее доказательства.

Т е о р е м а 10.9. Пусть ξ - некоторое $SO(3)$ -расслоение с $\ell = p_1(\xi)[M] \leq 3$. Тогда пространство модулей автодуальных связностей компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D_j - последовательность автодуальных связностей. Если

$$\max_{x \in M} |F_{D_j}|(x) \leq B,$$

то по теореме 8.8 в $\{D_j\}$ найдется подпоследовательность, калибровочно эквивалентная сходящейся последовательности связностей; стало быть, в пространстве модулей сходится последовательность точек, представляющих связности D_j . Поэтому предположим, что

$$\max_{x \in M} |F_{D_j}|(x) \rightarrow \infty.$$

Тогда из доказательства теоремы 8.31 вытекает существование таких точек $x_j \in M$ и последовательности $\lambda_j \rightarrow 0$, что $e_{\lambda_j, x_j}^*(D_j) \rightarrow I_K$, где I_K - нетривиальная автодуальная $SO(3)$ -связность на $\mathbb{R}^4$, ограниченная на шар радиуса K . Снова можно показать, что I_K продолжается до $SO(3)$ -связности I на сфере S^4 , а так как $H^2(S^4; \mathbb{Z}_2) = 0$, то I поднимается до $SU(2)$ -связности. Согласно формуле Чжэня - Вейля (10.1),

$$\ell = \frac{1}{4\pi^2} \int_M |F_{D_j}|^2 \geq \frac{1}{4\pi^2} \int_{B_K} |F_{I_K}|^2.$$

Но для больших значений K

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{B_K} |F_{I_K}|^2 \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} |F_I|^2 = 4k,$$

где k — топологический заряд связности I . Так как $l \leq 3$, то $k = 0$. Следовательно, $F_I \equiv 0$ и раздутие не может иметь места. Таким образом, пространство модулей компактно, что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ГРУППА СОБОЛЕВСКИХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В гл. 3 и 5 мы сформулировали несколько технических утверждений о действии группы $\mathfrak{G}_\ell$ соболевских калибровочных преобразований. Техника, необходимая для доказательства этих утверждений, была описана в гл. 6; она основана на теоремах вложения Соболева, мультипликативных свойствах соболевских пространств, лемме о композиции. Здесь мы дадим доказательства.

Напомним, что если ξ — векторное расслоение над компактной областью M , то через $L_k^p(\xi)$ обозначается банахово пространство сечений ξ , производные которых порядка $\leq k$ лежат в L^p . Если $p = 2$, то $H_\ell(\xi) = L_\ell^2(\xi)$ является гильбертовым пространством. Пространства $L_k^p(\xi)$ сепарабельны при всех $1 \leq p < \infty$ и содержат $C^\infty(\xi)$ в качестве плотного подпространства. Они рефлексивны при $1 < p < \infty$. Основные свойства этих пространств перечислены в гл. 6 (утверждения 6.30 — 6.34).

Определим еще раз наши основные объекты: группу соболевских калибровочных преобразований $\mathfrak{G}_\ell$ и соболевское пространство связностей $\mathcal{A}_{\ell-1}$. Отметим, что группа $\mathfrak{G}_\ell$ требует специального определения, поскольку калибровочные преобразования являются сечениями расслоения со слоями — группами Ли. Итак,

$$\mathfrak{G}_\ell = \{z \in H_\ell(\text{End } \eta) : z^* z = 1 \text{ почти всюду}\} \subseteq H_\ell(\text{End } \eta),$$

$$(A.1) \quad \Omega^i(\xi)_k = H_k(\wedge^i T^* M \otimes \xi),$$

$$\mathcal{A}_{\ell-1} = \{D_0 + A : D_0 \in \mathcal{A}, A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}\}.$$

Фиксируем гладкое многообразие M размерности 4.

Предложение А.2. Для любого $\ell > 2$ группа $\mathfrak{G}_\ell = H_\ell(\text{Aut } \eta)$ является гильбертовой группой Ли с алгеброй

Ли $H_\ell(\text{ad } \eta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем вначале экспоненциальное отображение Exp , с помощью которого $\mathfrak{G}_\ell$ наделяется структурой гильбертова многообразия. В точке $z \in \mathfrak{G}_\ell$ это отображение действует на сечение $u \in H_\ell(\text{ad } \eta)$ по формуле

$$(\text{Exp}_z u)(x) = \exp_{z(x)} u(x).$$

Это определение имеет смысл, поскольку $z(x)$, $u(x)$ и $\bar{z}(x) = (\text{Exp}_z u)(x)$ непрерывны и $\bar{z}^*(x)\bar{z}(x) = 1$ для всех x . Гладкость отображения Exp следует из леммы о композиции, примененной к гладкому отображению $\exp$ и к ℓ раз дифференцируемым сечениям $z \in H_\ell(\text{Aut } \eta) \subseteq H_\ell(\text{End } \eta)$, $u \in H_\ell(\text{ad } \eta)$. Чтобы показать, что мы имеем гладкое многообразие, нужно проверить, что композиция $\text{Exp}_t^{-1} \circ \text{Exp}_z$ является гладким и обратимым отображением в открытом диске из $H_\ell(\text{ad } \eta)$ для всех t , достаточно близких к z . Из определения следует, что

$$(\text{Exp}_t^{-1} \circ \text{Exp}_z)(u)(x) = \exp_{t(x)}^{-1}(\exp_{z(x)} u(x)).$$

По лемме о композиции это отображение является гладким для всех пар $\langle t, u \rangle$, пробегающих открытое множество в $\mathfrak{G}_\ell \times H_\ell(\text{ad } \eta)$. Положим $\delta = \rho/3$, где ρ — радиус инъективности группы $SU(2)$; тогда обратное отображение $\text{Exp}_z^{-1} \circ \text{Exp}_t$ для $\text{Exp}_t^{-1} \circ \text{Exp}_z$ корректно определено на множестве

$$\{\langle t, u \rangle \in \mathfrak{G}_\ell \times H_\ell(\text{ad } \eta) : \text{dist}(z(x), t(x)) \leq \delta, |u(x)| < \delta\}.$$

Поскольку топология пространства H_ℓ сильнее C^0 -топологии, мы получаем гладкие функции перехода для всех точек $t \in \mathfrak{G}_\ell$, достаточно близких к z . Здесь мы пользуемся соболевским вложением $H_\ell \subset C^0$, которое имеет место для четырехмерного многообразия при всех $\ell > 2$.

Гладкость групповых операций доказывается аналогично. Пространство H_ℓ является алгеброй, поэтому умножение

$$(z \cdot u)(x) = z(x)u(x)$$

определяет билинейное отображение

$$H_\ell(\text{End } \eta) \times H_\ell(\text{End } \eta) \rightarrow H_\ell(\text{End } \eta),$$

которое ограничивается на $H_\ell(\text{Aut } \eta) = \mathfrak{G}_\ell$. Подобным же образом, операция обращения представляет собой ограничение на $\mathfrak{G}_\ell$ линейного отображения $z \mapsto z^*$ в $H_\ell(\text{End } \eta)$.

Группа $\mathfrak{G}_2$ обладает некоторыми из перечисленных свойств. Однако из-за того, что пространство H_2 не вкладывается в C^0 , она не является многообразием. Поэтому для $\mathfrak{G}_2$ теряет смысл понятие гладкости и при обращении с ней требуется величайшая осторожность.

Предложение А.З. Пусть $\ell > 2$. Тогда группа $\mathfrak{G}_\ell$ гладко действует на $\mathcal{A}_{\ell-1}$.

Доказательство. Напомним, что

$$\mathcal{A}_{\ell-1} = \{D_0 + A : A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}\}$$

для некоторой фиксированной связности $D_0 \in \mathcal{A}$. Если $D = D_0 + A$ — произвольная связность, то

$$z^*(D) = D_0 + z^{-1}D_0z + z^{-1}Az,$$

и поэтому действие группы $\mathfrak{G}_\ell$ может быть представлено в виде

$$(z, A) \mapsto z^{-1}D_0z + z^{-1}Az.$$

Отображение $z \mapsto z^{-1}$ является гладким в $\mathfrak{G}_\ell$, а $z \mapsto D_0z$ — гладкое отображение из $\mathfrak{G}_\ell$ в $\Omega^1(\text{End } \eta)_{\ell-1}$. Кроме того, $H_{\ell-1}$ является H_ℓ -модулем. Предложение А.З доказано.

Предложение А.4. Оператор кривизны

$$F: \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-2}$$

является гладким отображением для всех $\ell > 2$.

Доказательство. Пусть, как и выше, $D = D_0 + A$, где $D_0 \in \mathcal{A}$ и $A \in \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1}$. Тогда

$$F(D_0 + A) = F(D_0) + D_0 A + A \wedge A.$$

Ясно, что отображение

$$\mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-2},$$

задаваемое правилом $A \mapsto D_0 A$, линейно и, значит, гладко. Кроме того, гладко $F(D_0)$. Поэтому остается исследовать квадратичный член $A \mapsto A \wedge A$. С этой целью воспользуемся теоремой умножения Соболева. Если $\ell > 3$, то пространство $H_{\ell-1}$ является алгеброй, и мы получаем, что отображение $A \mapsto A \wedge A$ переводит $H_{\ell-1}$ в $H_{\ell-1} \subset H_{\ell-2}$. Для $\ell = 3$ из теорем 6.32 и 6.34 следует, что в размерности четыре $H_2 \subset L_1^3$ и $L_1^3 \otimes L_1^3 \subset L_1^2$. Предложение А.4 доказано.

Восстановим теперь пропущенную часть доказательства того, что пространство орбит $\hat{\mathcal{X}}_{\ell-1}$ является хаусдорфовым.

Предложение А.5. Предположим, что $D'_n = z_n^*(D_n)$, где $D_n, D'_n \in \mathcal{A}_{\ell-1}$, $\ell > 2$ и $z_n \in \mathfrak{G}_1$. Тогда $z_n \in \mathfrak{G}_\ell$. Более того, если последовательности D'_n и D_n сходятся в $\mathcal{A}_{\ell-1}$, то найдется подпоследовательность $z_{n'}$, сходящаяся в $\mathfrak{G}_\ell$.

Доказательство. Включение $z_n \in \mathfrak{G}_\ell$ будет доказано, если мы сумеем оценить норму z_n в $H_\ell(\text{End } \eta)$. С этой целью представим D'_n и D_n в виде $D'_n = D + A'_n$, $D_n =$

$= D + A_n$. Тогда

$$A'_n = z_n^{-1} D z_n + z_n^{-1} A_n z_n,$$

или

$$(A.6) \quad D z_n = A_n z_n - z_n A'_n.$$

Заметим, что $z_n \in H_1(\text{End } \eta) \cap L^\infty(\text{End } \eta)$, поэтому последнее равенство имеет смысл. Поскольку преобразование z_n почти всюду унитарно и его нормой является следовая норма, мы имеем

$$(A.7) \quad d|z_n| \leq |D z_n| \leq |A_n z_n| + |z_n A'_n| = \\ = |A_n| + |A'_n|.$$

По теореме Соболева A'_n и A_n ограничены в L^p для

$$\frac{\ell-1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} > 0. \quad \text{Пусть } p - \text{произвольное число,}$$

$4 \leq p \leq \infty$. Тогда $D z_n$ ограничено в L^p и z_n ограничено в L_1^p .

Вернемся к равенству (A.6). Применяя теорему Соболева, мы получаем, что A'_n и A_n ограничены в L_1^4 , поскольку

$$\frac{\ell-2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \geq 0, \quad \text{если } \ell \geq 3. \text{ Воспользуемся теперь}$$

теоремой умножения, замечая на сей раз, что L_1^4 является L_1^p -алгеброй, поскольку $p > 4 = \dim M$. Отсюда следует ограниченность преобразования $D z_n$ в L_1^4 и, значит,

$z_n \in L_2^4$. Еще раз обратимся к (A.6) и воспользуемся тем, что $L_2^2 \subset L_{\ell-1}^2$ является L_2^4 -алгеброй, поскольку $2 \cdot 4 > \dim M = 4$. В результате находим, что $D z_n$ ограничено в L_2^2 и z_n ограничено в L_3^2 .

При $\ell = 3$ все сделано. В противном случае применим индукцию. Предположим, что преобразование z_n ограничено в L_k^2 для $k < \ell$. Тогда A_n и A'_n также ограничены в $L_k^2 = L_{\ell-1}^2$. Так как L_k^2 является алгеброй при $k > 2$, то преобразование $D z_n$ ограничено в L_k^2 , а z_n ограничено в L_{k+1}^2 . Продолжая этот процесс, мы докажем ограниченность z_n в L_ℓ^2 .

Выберем теперь в $L_\ell^2(\text{End } \eta)$ слабо сходящуюся подпоследовательность $z_{n'}$. Используя строгое неравенство в теореме Соболева, находим, что $z_{n'}$ сходится в $L_{\ell-1}^q$ для $2 < q < 4$. Но отображение $L_{\ell-1}^q \otimes L_{\ell-1}^2 \rightarrow L_{\ell-1}^2$ непрерывно, поскольку $q(\ell-1) > 2q > 4$. Следовательно, $Dz_{n'}$ сходится в $L_{\ell-1}^2$ и, значит, $z_{n'}$ сходится в L_ℓ^2 . Так как группа $\mathfrak{G}$ замкнута в $H_\ell(\text{End } \eta)$, то предел z последовательности $z_{n'}$ лежит в $\mathfrak{G}_\ell$. Предложение А.5 доказано.

Напомним теперь, что группа $\mathfrak{G}$ действует на пространстве сечений $\Omega^i(\text{ad } \eta)$ по правилу

$$(A.8) \quad (z, \Phi) \mapsto z^* \Phi = \text{ad}(z^{-1}) \Phi = z^{-1} \Phi z.$$

Предложение А.9. Группа $\mathfrak{G}_\ell$ гладко действует на $\Omega^i(\text{ad } \eta)_k$ для $-\ell \leq k \leq \ell$, $\ell > 2$.

Доказательство. Нам нужно показать, что отображение

$$\mathfrak{G}_\ell \times \Omega^i(\text{ad } \eta)_k \rightarrow \Omega^i(\text{ad } \eta)_k,$$

задаваемое формулой (А.8), является гладким. Это очевидно для $k \geq 0$, поскольку тогда пространство H_k наделяется структурой H_ℓ -алгебры при $k < \ell$, $2 < \ell$. Для $k < 0$ воспользуемся дуальным пространством $\Omega^i(\text{ad } \eta)_{-k} \simeq (\Omega^i(\text{ad } \eta)_k)^*$. Требуемый результат следует теперь из того, что преобразование z линейно по Φ и самосопряженно.

Следствие А.10. Пусть отображение

$$L: \mathcal{A}_{\ell-1} \times \Omega^1(\text{ad } \eta)_{\ell-1} \rightarrow \Omega^0(\text{ad } \eta)_{\ell-2} \oplus \Omega_-^2(\text{ad } \eta)_{\ell-2}$$

задано формулой

$$L(D, A) = D^* A \oplus P_- D A.$$

Тогда L эквивариантно относительно действия группы $\mathfrak{G}_\ell$.

Кроме того, $L(D, \cdot)$ является фредгольмовым отображением для всех $D \in \mathcal{A}_{\ell-1}$.

В. КОНСТРУКЦИЯ ПОНТЯГИНА—ТОМА

В этом приложении мы дадим новое, геометрическое, доказательство утверждения 5.13.

Т е о р е м а В.І. Пусть M — компактное ориентированное четырехмерное многообразие с $H_1(M) = 0$. Тогда

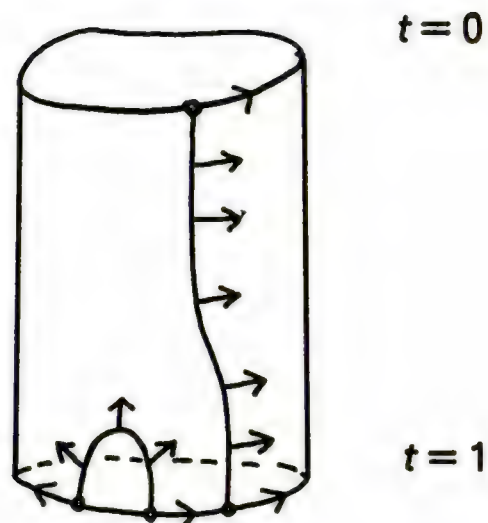
$$[M, S^3] = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{если } \omega \text{ четна,} \\ 0, & \text{если } \omega \text{ нечетна.} \end{cases}$$

Как обычно, символом ω обозначается форма пересечений многообразия M . Доказательство теоремы В.І основано на геометрическом описании множества $[M, S^3]$ в любой размерности.

Временно обозначим через M произвольное компактное многообразие. Назовем два компактных подмногообразия N, N' кобордантными в M , если существует такое компактное подмногообразие $Z \subseteq M \times [0, 1]$, что

$$\partial Z = N \times \{0\} \cup N' \times \{1\}.$$

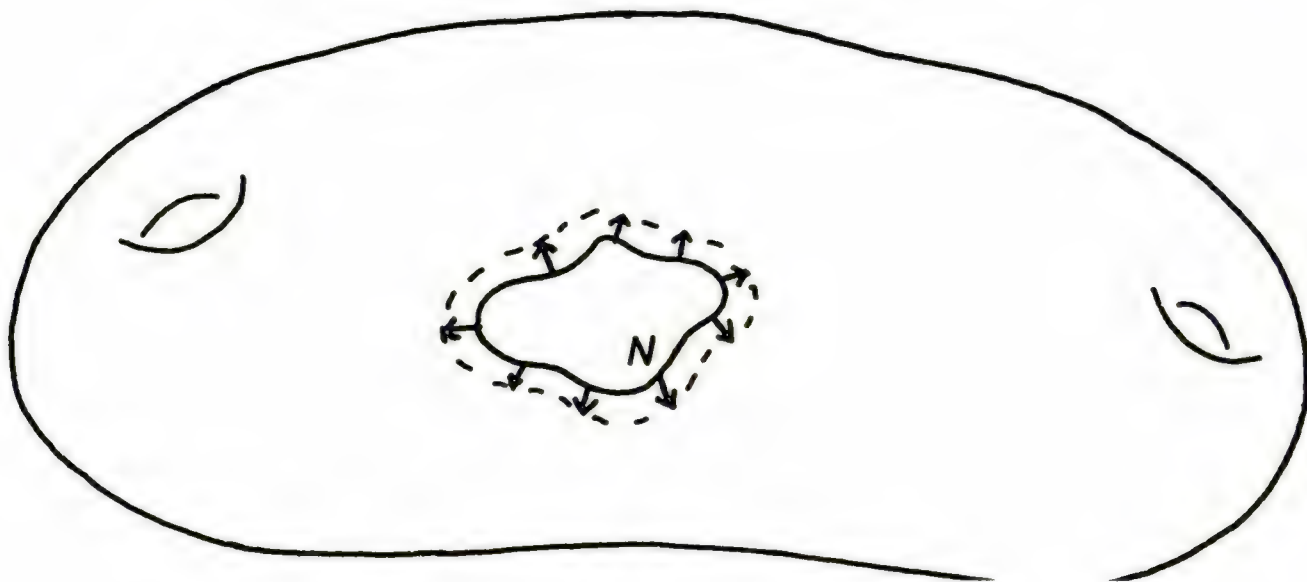
Кобордизм является отношением эквивалентности на множестве компактных подмногообразий из M . Множитель $[0, 1]$ в произведении $M \times [0, 1]$ можно трактовать как время, в течение которого кобордизм Z преобразует подмногообразие N в N' . Существует много различных структурированных вариантов понятия кобордизма; нашим целям отвечает так называемый оснащенный кобордизм. Оснащением подмногообразия N называется базис ν_N гладких сечений нормального расслоения $\nu_{N \hookrightarrow M}$ подмногообразия N в M . Два оснащенных подмногообразия N, N' называются оснащенно кобордантными, если существует кобордизм Z вместе с оснащением ν_Z нормального расслоения $\nu_{Z \hookrightarrow M \times [0, 1]}$, ограничения которого на $M \times \{0\}$ и $M \times \{1\}$ соответственно совпадают с ν_N и $\nu_{N'}$.



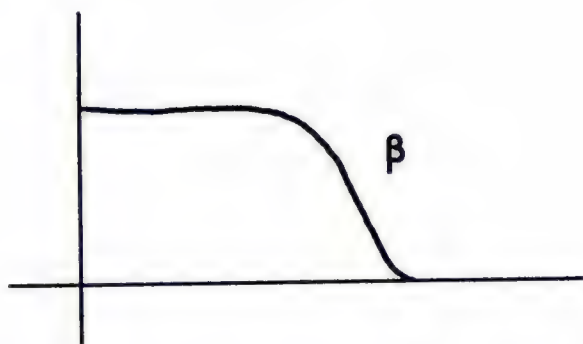
Оснащенный кобордизм также является отношением эквивалентности; для него имеется простое гомотопическое описание.

Т е о р е м а В.2 (Понтрягин – Том). Классы эквивалентности оснащенных подмногообразий коразмерности n находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $[M, S^n]$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [м3]; поэтому мы ограничимся лишь построением указанного в ней соответствия. Пусть $f: M \rightarrow S^n$ – некоторое гладкое отображение и $y \in S^n$ – его регулярное значение. Тогда $N = f^{-1}(y)$ является гладким подмногообразием в M и для каждой точки $x \in N$ дифференциал df_x изоморфно отображает нормальное пространство $T_x M / T_x N$ на $T_y S^n$. Поэтому, фиксируя оснащение v_y в точке $y \in S^n$, мы получим оснащение подмногообразия N : $v_N(x) = (df_x)^{-1}(v_y)$. Обратно, оснащенное нормальное расслоение к оснащеному подмногообразию N может быть реализовано в виде тривиальной трубчатой окрестности $N \times \mathbb{R}^n \subseteq M$, для которой стандартное оснащение пространства $\mathbb{R}^n$ индуцирует оснащение v_N .



Используя срезающую функцию β вида

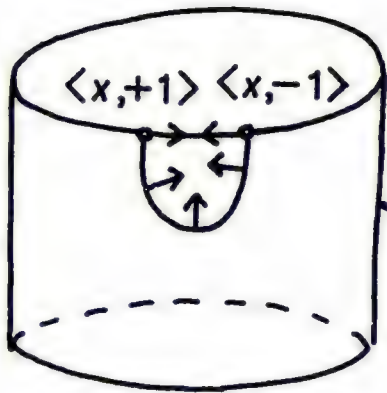


можно продолжить проекцию $\pi: N \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ до отображения $f: M \rightarrow S^n$, задаваемого правилом

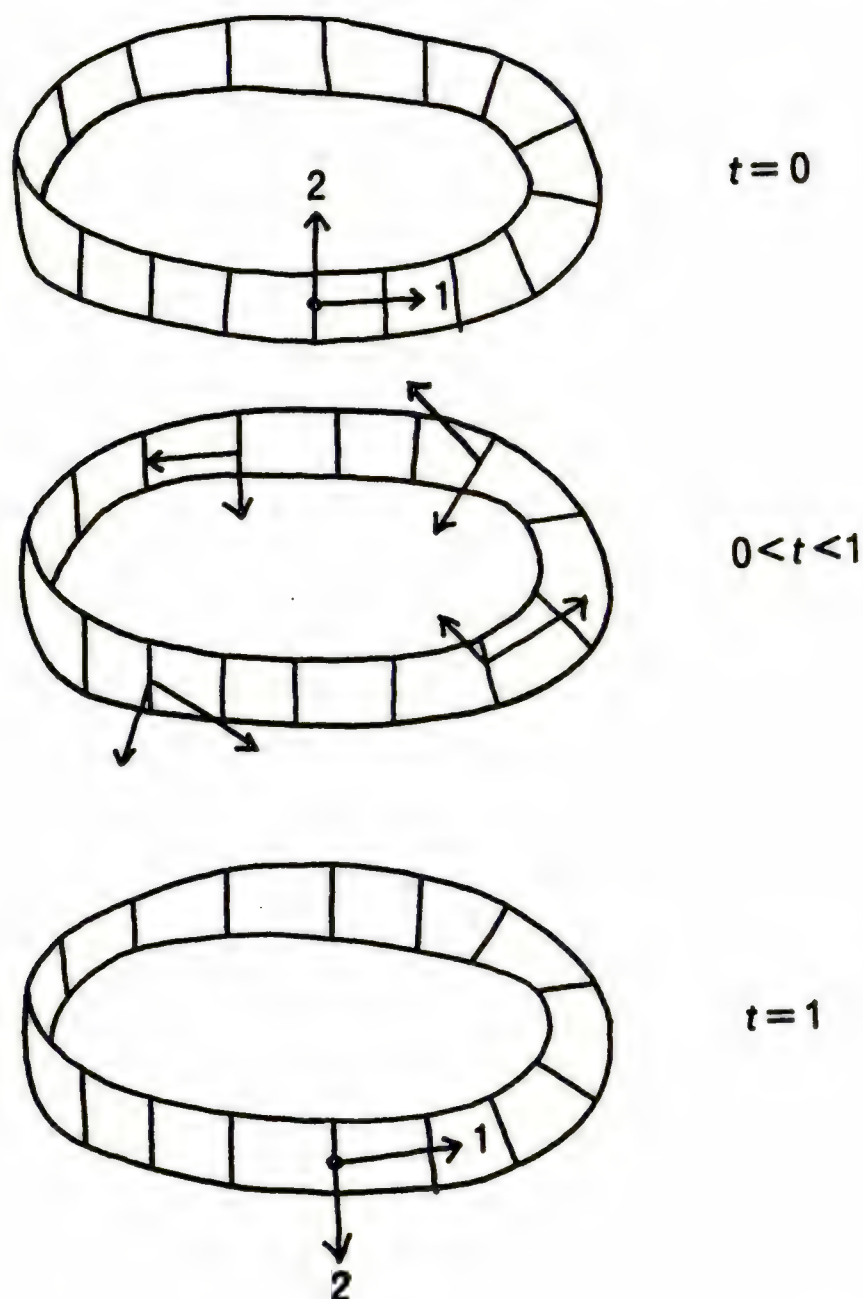
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi(x)}{\beta(|x|)}, & \text{если } x \in N \times \mathbb{R}^n, \\ \infty, & \text{если } x \notin N \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где сфера S^n отождествляется с $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ при помощи стереографической проекции. Гомотопический класс $[f] \in [M, S^n]$ однозначно определяется классом бордизма $\langle N, \nu_N \rangle$.

Для разминки рассмотрим случай $\dim M = n$. Тогда подмногообразие коразмерности n — это просто конечный набор точек, а оснащение ν_x в точке $x \in M$ — выбор базиса в касательном пространстве $T_x M$. Если многообразие M ориентировано, т.е. обращается в нуль его первый класс Штифеля — Уитни $w_1(M)$, припишем знак $+1$ точке x в случае, когда базис ν_x ориентирован положительно, и -1 в случае, когда он ориентирован отрицательно. Но объединение $N = \langle x, +1 \rangle \cup \langle x', -1 \rangle$ оснащено кобордантно нулю:



Поэтому, суммируя ориентации, мы легко получаем из (В.2), что $[M, S^2] \simeq \mathbb{Z}$, причем изоморфизм задается степенью отображения. Предположим теперь, что M неориентируемо, и пусть $S^1 \hookrightarrow M$ — окружность, для которой ограничение $\Lambda^2 T^*M|_{S^1}$ представляет собой лист Мёбиуса. Тогда, обходя вокруг этого листа Мёбиуса, мы получим оснащенный кобордизм между $+1$ и -1 . В этом случае $[M, S^2] \simeq \mathbb{Z}_2$ и изоморфизм задается неориентированной степенью.

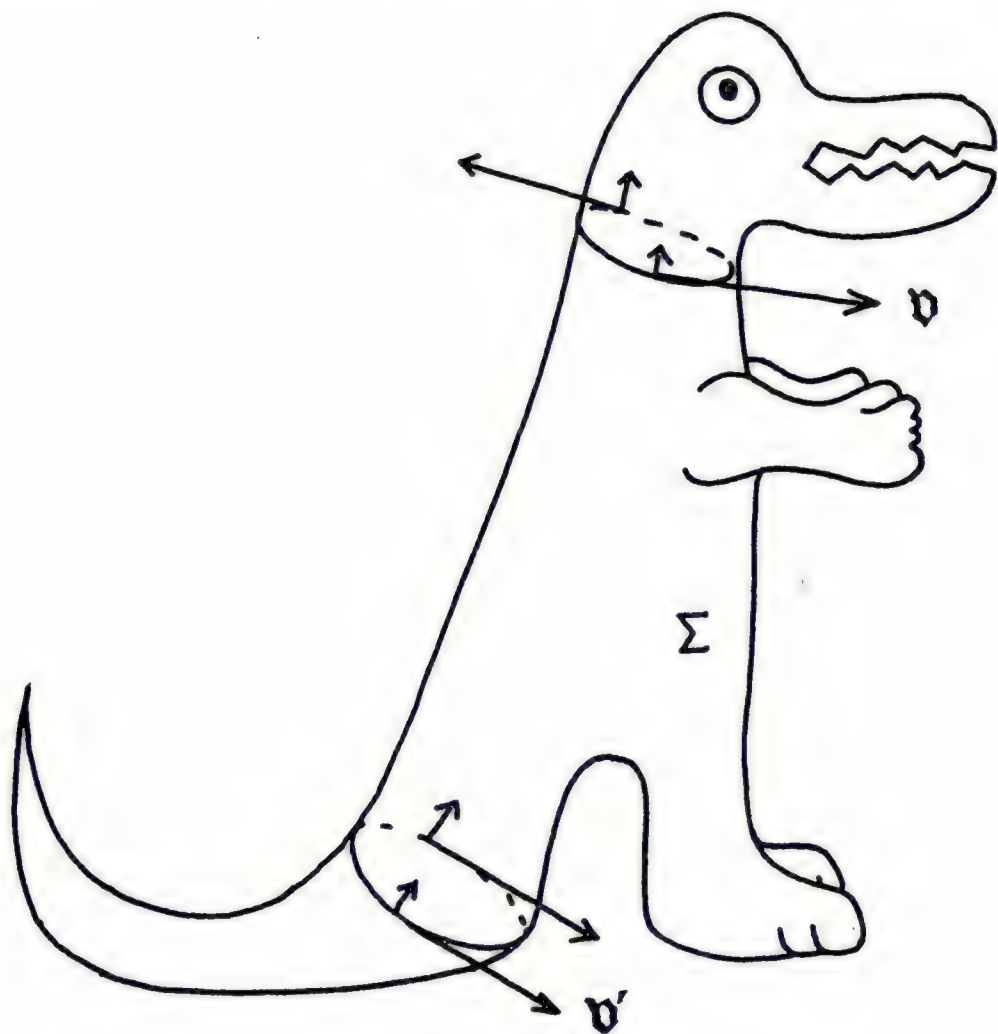


Вычислим теперь $[M, S^3]$ для компактного ориентированного четырехмерного многообразия M с $H_1(M) = 0$. Согласно теореме В.2, $[M, S^3]$ отождествляется с множеством оснащенных одномерных многообразий, рассматриваемых с точностью до оснащенного кобордизма. Если игнорировать оснащение, то любое компактное одномерное многообразие (являющееся объединением окружностей) кобордантно нулю, поскольку $H_1(M) = 0$. Так как нормальное расслоение $\nu_{S^1 \hookrightarrow M}$ тривиально, то функция перехода для каких-либо двух оснащений ν_{S^1} и ν'_{S^1} определяет отображение

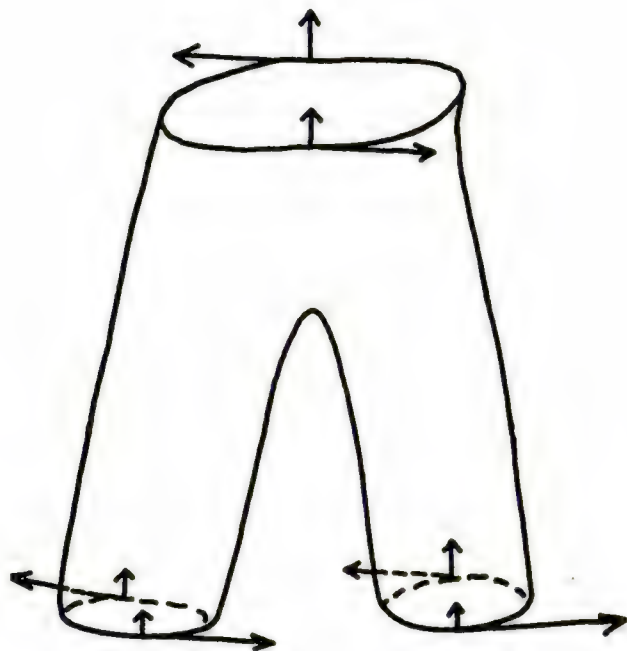
$S^1 \rightarrow SO(3)$. Пусть N, N' — две оснащенные окружности в многообразии M . Тогда оснащенный кобордизм Z между N и N' определяет гомотопию $\nu_N \sim \nu_{N'}$, и обратно, гомотопия $\nu_N \sim \nu_{N'}$ задает оснащенный кобордизм. Итак, если Z — неоснащенный кобордизм между N и N' , то легко видеть, что расслоение $\nu_Z \hookrightarrow M \times [0, 1]$ тривиально и, значит, мы можем продолжить оснащение N' на все многообразие Z . Это продолженное оснащение ограничивается до нового оснащения подмногообразия N , и, как было показано, любая оснащенная окружность оснащено кобордантна оснащению N . Оснащенные кобордизмы между различными оснащениями N — это в точности отображения $N \times [0, 1] \rightarrow SO(3)$, т.е. гомотопии петель в $SO(3)$. Следовательно, множество $[M, S^3]$ есть самое большее $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$. Если форма пересечений ω многообразия M нечетна, то существует ориентированная поверхность $\Sigma \subseteq M$, эйлеров класс которой

$$\chi(\Sigma)_{\text{mod } 2} \in H^2(M; \pi_1(SO(3))) = H^2(M; \mathbb{Z}_2)$$

не равен нулю (см. гл. I). Тогда по аналогии с указанным выше кобордизмом в форме листа Мёбиуса построим оснащенный кобордизм между оснащениями ν, ν' с ненулевой разностью, заставив Σ поглотить ν и выделить ν' :



Очевидно, что в этом случае $[M, S^3] = 0$. Если же форма ω четна, то такой кобордизм невозможен. В обоих случаях оснащенные одномерные многообразия, состоящие из некоторого числа оснащенных окружностей, оснащено коборданты единственной оснащенной окружности и требуемый кобордизм имеет форму «пары штанов»:



Тем самым теорема В.І полностью доказана.

С. ФОРМУЛЫ ВЕЙТЦЕНБЁКА

Формулы Вейтценбёка можно получить инвариантным образом, рассматривая расслоение реперов. При таком геометрическом подходе основной акцент делается на $SO(4)$ -симметрию, а формулы (6.24) – (6.26) с точностью до числовых коэффициентов непосредственно следуют из теории представлений. Чтобы не усложнять изложение, мы не станем вводить оператор Дирака, хотя разложения Вейтценбёка соответствуют модули Клиффорда $[AB\bar{S}]$ и, следовательно, операторы Дирака. Геометрический вывод формул Вейтценбёка дан в $[AHS]$, $[Pa]$; другой подход можно найти в $[Bou]$.

Начнем с некоторых общих соображений о дифференциальных операторах на римановых многообразиях. Обозначим через $SO(M)$ главное $SO(n)$ -расслоение реперов ориентированного n -мерного риманова многообразия M . На расслоении $SO(M)$ имеется каноническое $so(n)^*$ -значное вертикальное векторное поле

(т.е. вертикальное векторное поле для каждого элемента из $\mathfrak{so}(n)$), в котором закодирована структура главного расслоения, и каноническая $\mathbb{R}^n$ -значная 1-форма, которая задает координаты касательных векторов. Связность Леви-Чивита — это $\mathfrak{so}(n)$ -значная 1-форма $\odot$, определяющая проекцию на вертикальное касательное пространство. Существует двойственный подход, который лучше приспособлен для описания дифференциальных операторов. А именно, связность Леви-Чивита определяет горизонтальное $\mathbb{R}^n$ -значное векторное поле ∂ . Представим это поле в виде $\partial = e^k \otimes \partial_k$, где $\{e^k\}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^{n*}$; тогда $\partial_k(f)$ является горизонтальным поднятием k -го элемента репера $f \in SO(M)$. Формулы

$$(R_g)_*(\partial) = g \cdot \partial,$$

(C.1)

$$(R_g)^*(\odot) = \text{Ad } g^{-1} \cdot \odot$$

описывают, как изменяются векторное поле ∂ и 1-форма $\odot$ при правом сдвиге в слое на элемент $g \in SO(n)$, т.е. выражают $SO(n)$ -симметрию. Риманова кривизна $\mathcal{R}$, представленная на $SO(M)$ инвариантным отображением $\mathcal{R}: SO(M) \rightarrow \wedge^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathfrak{so}(n)$, определяется формулой

(C.2)

$$\mathcal{R} = -\odot([\partial, \partial]),$$

где $[\partial, \partial] = e^k \wedge e^l \otimes [\partial_k, \partial_l]$.

Указанный формализм переносится на G -расслоения P с заданными на них связностями (такие связности естественно назвать внешними). В частности, ортогональное представление

$\rho: SO(n) \times G \rightarrow \text{Aut}(V)$ определяет ассоциированное векторное расслоение $\tilde{V} = (SO(M) \times P) \times_G V$ со связностью ∂ , кривизна которой имеет вид

$$(C.3) \quad -\dot{\rho} \odot ([\partial, \partial]).$$

Здесь $\dot{\rho}: \mathfrak{so}(n) \times \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ — представление алгебр Ли, индуцированное гомоморфизмом ρ . Если ρ — произведение представлений, то кривизна (C.3) расщепляется (в слегка упрощенных обозначениях) в сумму $\mathcal{R} + F$ внутренней и внешней кривизн.

Эквивариантное $SO(n)$ -отображение

$$A: SO(M) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^{n*}, \text{Hom}(V_1, V_2))$$

определяет дифференциальный оператор первого порядка $A(\partial) = A(e^k) \partial_k$. Этот оператор отображает сечения расслоения $\tilde{V}_1$ в сечения расслоения $\tilde{V}_2$ по следующему правилу: если $\psi: SO(M) \rightarrow V_1$ — сечение расслоения $\tilde{V}_1$, то $A(\partial)\psi = A(e^k)(\partial_k \psi): SO(M) \rightarrow V_2$ — сечение расслоения $\tilde{V}_2$.

Отображение A является символом оператора $A(\partial)$. Сопряженный оператор $A(\partial^*)$ имеет символ $A^*(e) = -A(e)^*$; знак минус возникает при интегрировании по частям. Последовательность символов первого порядка

$$(C.4) \quad V_0 \xrightarrow{A_1(e)} V_1 \xrightarrow{A_2(e)} V_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{A_n(e)} V_n$$

называется эллиптическим комплексом, если она точна для каждого ненулевого вектора $e \in \mathbb{R}^{n*}$.

Рассмотрим прямые суммы $V = \bigoplus_i V_i$, $A = \bigoplus_i A_i$ и определим отображение $L(e, e'): V \rightarrow V$, полагая

$$(C.5) \quad L(e, e') = -(A(e)A(e')^* + A(e)^*A(e')).$$

С эллиптическим комплексом (С.4) ассоциирован лапласиан $L(\partial^2) = L(e^k, e^l) \partial_k \partial_l$, символом которого служит симметрическая часть L . Простейший лапласиан $\nabla^* \nabla = -\sum_k \partial_k \partial_k$ отвечает двучленному комплексу

$$(C.6) \quad V \xrightarrow{\otimes} V \otimes \mathbb{R}^{n*}$$

и определен для произвольного векторного пространства V (см. (6.23)). Предположим, что

$$L(e, e) = -\|e\|^2,$$

т.е. символы комплексов (С.4) и (С.6) согласованы (в этом случае отображение $e \mapsto A(e) - A(e)^*$ индуцирует на V структуру модуля Клиффорда). Тогда имеет место формула Вейтценбёка, связывающая операторы на комплексах (С.4) и (С.6):

$$\begin{aligned} (C.7) \quad L(\partial^2) &= L(e^k, e^l) \partial_k \partial_l = \\ &= -\sum_k \partial_k \partial_k + \sum_{k < l} L(e^k, e^l) [\partial_k, \partial_l] = \\ &= \nabla^* \nabla - \sum_{k < l} L(e^k, e^l) \circ \rho \odot ([\partial_k, \partial_l]), \end{aligned}$$

где ρ — представление в пространство V . Добавочным членом в указанной формуле служит самосопряженный оператор нулевого порядка, зависящий лишь от кривизны. Из формул преобразования (С.1) и $SO(n)$ -эквивариантности отображения A следует, что корректирующий член в формуле (С.7) также $SO(n)$ -эквивариантен. Это позволяет получить его явный вид методами теории групп.

Алгебраической версией нашего основного комплекса (6.22) служит последовательность символов

$$\begin{aligned} (C.8) \quad 0 \rightarrow \Lambda^0 \mathbb{R}^{4*} \otimes \text{ad } W &\xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} \Lambda^1 \mathbb{R}^{4*} \otimes \text{ad } W \rightarrow \\ &\xrightarrow{\sqrt{2} P_- \varepsilon \otimes \text{id}} \Lambda^2_- \mathbb{R}^{4*} \otimes \text{ad } W \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где ε — оператор внешнего умножения. Обозначая внутреннее умножение через ι , находим, что символами ассоциированных лапласианов являются симметрические части линейных операторов

$$\begin{aligned} L_0(e^k, e^l) &= -\iota(e^k)\varepsilon(e^l) \otimes \text{id}, \\ (C.9) \quad L_1(e^k, e^l) &= -(\varepsilon(e^k)\iota(e^l) + 2\iota(e^k)P_-\varepsilon(e^l)) \otimes \text{id}, \\ L_2(e^k, e^l) &= -2P_-\varepsilon(e^k)\iota(e^l) \otimes \text{id}, \end{aligned}$$

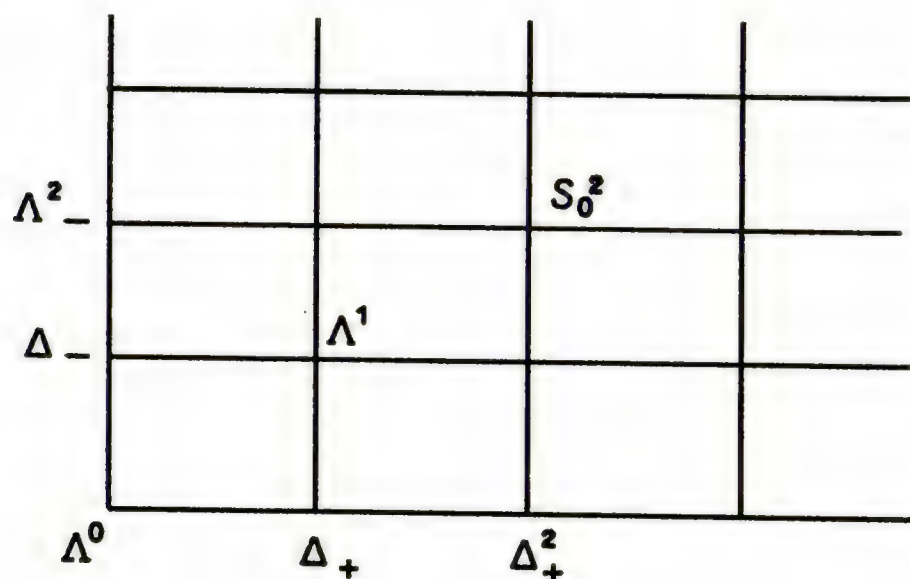
а добавочный член в формуле (C.7) разлагается в сумму

$$(C.10) \quad \sum_{k < l} L(e^k, e^l) \circ \mathcal{R}(e_k, e_l) \otimes \text{id} + \sum_{k < l} L(e^k, e^l) \otimes F(e_k, e_l),$$

где $\{e_k\}$ — базис в $\mathbb{R}^4$, двойственный базису $\{e^k\}$. Так как $\mathcal{R}(e_k, e_l) = L_0(e^k, e^l) = 0$ на $\mathbb{R}^4$ для $k < l$, то для L_0 выражение (C.10) обращается в нуль. Это доказывает формулу (6.24). Короткое вычисление показывает, что $L_1(\alpha)$ не обращается в нуль только для автодуальных α , а $L_2(\beta)$ не обращается в нуль лишь для антиавтодуальных β . Опустим на время пространство W в последовательности (C.8). Тогда имеют место $SO(4)$ -эквивариантные линейные отображения

$$\begin{aligned} L_1: \Lambda_+^2 &\rightarrow \Lambda^1 \otimes \Lambda^1, \\ L_2: \Lambda_-^2 &\rightarrow \Lambda_-^2 \otimes \Lambda_-^2. \end{aligned}$$

В неприводимом разложении каждого из представлений $\Lambda_+^2 \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^1$ и $\Lambda_-^2 \otimes \Lambda_-^2 \otimes \Lambda_-^2$, вычисленном с помощью весовой диаграммы для $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$:



имеется лишь одномерная тривиальная часть. Следовательно, с точностью до скалярного множителя отображения L_1 и L_2 должны совпадать соответственно с отображениями (6.27) и (6.28). Далее, присоединенное представление $ad W$ является скобкой Ли. Это дает (с точностью до множителя) члены, содержащие внешнюю кривизну, в (6.25) и (6.26). Для того чтобы вычислить члены с внутренней кривизной, мы исследуем первое слагаемое в сумме (С.10). Заметим прежде всего, что кривизна входит в него линейно. Кроме того, так как

$$\sum_{k < l} L_1(e^k, e^l) \cdot \mathcal{R}(e_k, e_l)$$

есть эквивариантное линейное отображение $\Lambda^1 \rightarrow \Lambda^1$, то из разложения римановой кривизны

$$\mathcal{R} = W^+ \oplus W^- \oplus Ric_0 \oplus R$$

вытекает, что это отображение является линейной комбинацией Ric_0 и R . Подобным образом,

$$\sum_{k < l} L_2(e^k, e^l) \cdot \mathcal{R}(e_k, e_l)$$

представляет собой эквивариантное отображение $\Lambda_-^2 \rightarrow \Lambda_-^2$, которое должно быть поэтому линейной комбинацией W^- и R . Это рассуждение дает формулы (6.25) и (6.26) с точностью до числовых коэффициентов.

Чтобы показать, какие выкладки приходится делать при избранном нами подходе, вычислим члены с внутренней кривизной в (6.26), предоставляя более простое вычисление внешней кривизны, а также вычисление добавочного члена в (6.25) читателю. Можно вывести требуемые формулы непосредственно из (С.9). Вместо этого мы заново получим выражение (С.7), проводя вычисления в подвижном репере. Точно такие же вычисления можно проделать в геодезических нормальных координатах. (Альтернативный подход заключается в вычислении характерных примеров, из которых находятся требуемые коэффициенты.) Пусть $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ — подвижный репер, формы связности относительно которого обращаются в нуль в точке приложения. Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 двойственный репер касательного пространства. Тогда в выбранной точке

$$d = \varepsilon(\theta^k) \nabla_{X_k},$$

$$d^* = -\iota(\theta^l) \nabla_{X_l},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \nabla &= dd^* + d^*d = -(\varepsilon(\theta^k) \iota(\theta^l) + \iota(\theta^k) \varepsilon(\theta^l)) \nabla_{X_k} \nabla_{X_l} = \\ &= -\sum_k \nabla_{X_k} \nabla_{X_k} - \sum_{k < l} (\varepsilon(\theta^k) \iota(\theta^l) + \iota(\theta^k) \varepsilon(\theta^l)) [\nabla_{X_k}, \nabla_{X_l}] = \\ &= \nabla^* \nabla + \sum_{k < l} (\varepsilon(\theta^k) \iota(\theta^l) + \iota(\theta^k) \varepsilon(\theta^l)) \mathcal{R}(X_k, X_l)^*. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$ — риманова кривизна, рассматриваемая как эндоморфизм касательного расслоения. Используя тот факт, что $\varepsilon(\theta^k)$ и $\iota(\theta^k)$ антикоммутируют при $k \neq l$, и записывая кривизну в координатах

$$\mathcal{R} = \sum_{k < l} R^{\cdot}_{\cdot kl} \theta^k \wedge \theta^l,$$

мы получаем общую формулу Вейтценбёка для дифференциальных форм:

$$(C.II) \quad dd^* + d^*d = \nabla^* \nabla + \varepsilon(\theta^k) \iota(\theta^l) R^{\cdot}_{\cdot kl}.$$

Разумеется, в (C.II) по дважды повторяющимся индексам k и l ведется суммирование.

Вычислим теперь действие добавочного члена на 2-форме $\theta^a \wedge \theta^b$. Напомним прежде всего, что кривизна Риччи определяется формулой

$$R^i_k = \sum_m R^i_{mkm},$$

а скалярная кривизна — формулой

$$R = \sum_m R_m^m.$$

Для удобства опустим все индексы. Тогда кривизна Вейля задается формулой

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{2} \{ \delta_{ik} R_{jl} - \delta_{il} R_{jk} - \delta_{jk} R_{il} + \delta_{jl} R_{ik} \} + \\ + \frac{1}{6} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \} R.$$

Для римановой кривизны выполняются соотношения симметрии

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$$

и тождество Бьянки

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

Наконец, полагая $\theta^{ij} = \theta^i \wedge \theta^j$ и суммируя по всем индексам, за исключением α и b , находим, что

$$\varepsilon(\theta^k) \lrcorner (\theta^l) R_{\cdot kl} (\theta^a \wedge \theta^b) = \\ = \varepsilon(\theta^k) \lrcorner (\theta^l) [R_{\alpha m kl} \theta^{mb} + R_{b m kl} \theta^{am}] = \\ = R_{\alpha l kl} \theta^{kb} - R_{\alpha m kb} \theta^{km} + R_{b m ka} \theta^{km} - R_{b l kl} \theta^{ka} = \\ = R_{\alpha k} \theta^{kb} + R_{bk} \theta^{ka} - R_{kma b} \theta^{km} = \\ = R_{\alpha k} \theta^{kb} + R_{bk} \theta^{ka} - W_{kma b} \theta^{km} - \\ - \frac{1}{2} (R_{mb} \theta^{am} - R_{ma} \theta^{bm} - R_{kb} \theta^{ka} + R_{ka} \theta^{kb}) +$$

$$+ \frac{1}{6} (\theta^{\alpha\beta} - \theta^{\beta\alpha}) R =$$

$$= -W_{k\alpha\beta} \theta^{km} + \frac{R}{3} \theta^{\alpha\beta}.$$

Кривизна Вейля W , рассматриваемая как эндоморфизм касательного расслоения, записывается в координатном виде подобно полной римановой кривизне:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k,l} W_{\cdot kl} e^k \wedge e^l.$$

Поэтому на 2-формах

$$(C.12) \quad dd^* + d^*d = \nabla^* \nabla - 2W(\cdot) + \frac{R}{3}.$$

Предположим теперь, что ω_- — некоторая антиавтодуальная 2-форма. Тогда

$$\begin{aligned} (dd^* + d^*d)\omega_- &= -(d^*d^*\omega_- + *d^*d\omega_-) = \\ &= -(-d^*d + *d^*d)\omega_- = (1 - *)d^*d\omega_- = \\ &= 2P_- d(-*d^*)\omega_- = 2d_- d_-^* \omega_-. \end{aligned}$$

Поэтому на антиавтодуальных 2-формах соотношение (C.12) выглядит следующим образом:

$$2d_- d_-^* = \nabla^* \nabla - 2W^-(\cdot) + \frac{R}{3}.$$

D. УСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

Использование в гл. 7 раздутия многообразия позволяет получить новое, очень простое доказательство теоремы об устранении особенностей, применимое также и к неавтодуальным решениям. Мы рассматриваем локальное решение уравнений Янга – Миллса в открытом шаре B^4 с некоторой (необязательно плоской) метрикой.

Т е о р е м а D.1. Пусть связность $D = d + A$ является решением уравнений Янга – Миллса в проколотом шаре $B^4 \setminus \{0\}$, причем

$$\int_{B^4} |F_D|^2 < \infty$$

и $A \in L^2_{1,loc}(B^4 \setminus \{0\})$. Тогда D калибровочно эквивалентна связности $\tilde{D}$, которая продолжается до гладкой связности на всем шаре B^4 .

Здесь $A \in L^2_{1,loc}(B^4 \setminus \{0\})$ означает, что $\varphi A \in L^2_1(B^4 \setminus \{0\})$ для любой гладкой функции φ с компактным носителем.

Прежде всего продеформируем конформно метрику так, чтобы она стала приближенно цилиндрической, как в гл. 7. Поскольку уравнения Янга – Миллса и норма в пространстве L^2 конформно инвариантны, такая деформация ничего не меняет. Рассмотрим теперь цилиндр $\{\tau_0 \leq \tau\}$ и положим $F = F_D$.

Л е м м а D.1. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} |F(\tau, \theta)| = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$\lim_{\bar{\tau} \rightarrow \infty} \int_{\tau \geq \bar{\tau}} |F(\tau, \theta)|^2 = 0.$$

Рассмотрим шары B_ε , на которых $\int_{B_\varepsilon(y_0)} |F(y)|^2 dy < \varepsilon$, где число ε зависит от геометрии, но в нашем контексте может быть фиксировано, поскольку геометрия цилиндра однородна. Для

таких шаров имеет место теорема регулярности, утверждающая, что

$$\epsilon^2 |F(y_1)|^2 \leq c \int_{B_\epsilon(y_0)} |F(y)|^2 dy,$$

если $\text{dist}(y_0, y_1) < \epsilon/2$. Это неравенство является обобщением теоремы регулярности 8.3, которая была доказана в гл. 8 для полных уравнений Янга – Миллса.

Если число $\bar{\tau}$ достаточно велико, то $\int_{\tau \geq \bar{\tau}} |F(\tau, \theta)|^2 < \epsilon$ и, значит, можно выбрать равномерно ограниченную последовательность шаров. Следовательно,

$$|F(\bar{\tau}, \theta)|^2 \leq \frac{c}{\epsilon^2} \int_{\bar{\tau}-1 \leq \tau < \bar{\tau}+1} |F(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Л е м м а Д.2. Для любого $\gamma < \sqrt{2}$ можно найти такое число $\bar{\tau}$, что при всех $\tau \geq \bar{\tau}$ имеет место неравенство

$$|F(\tau, \theta)| \leq \max_{\theta} |F(\bar{\tau}, \theta)| \cdot e^{\gamma(\bar{\tau}-\tau)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы просто повторим часть доказательства теоремы 9.8, в которой выводятся оценки распада. Выберем $\bar{\tau}$ так, чтобы метрика была близка к цилиндрической и чтобы $|F|(\tau, \theta)$ было малым при $\tau \geq \bar{\tau}$. Тогда из формул Вейтценбёка следует, что при $\tau \geq \bar{\tau}$, $\bar{\gamma} < 2$ справедливо неравенство

$$|F| + \bar{\gamma}|F| \geq 0.$$

Применяя принцип максимума 7.10, находим, что при $\bar{\tau} \leq \tau \leq \tau_n$, $\gamma < \sqrt{\bar{\gamma}}$ имеет место оценка

$$(D.3) \quad |F(\tau, \theta)| \leq \max_{\theta} |F(\bar{\tau}, \theta)| e^{\gamma(\bar{\tau}-\tau)} + \max_{\theta} |F(\tau_n, \theta)| e^{\gamma(\tau-\tau_n)}.$$

Устремив τ_n к бесконечности, получаем утверждение леммы.

Теперь обратимся к нашей конструкции экспоненциальной калибровки в шейке инстантона. Мы опять можем устремить τ_n к бесконечности и получить калибровку на всей области $\tau \geq \bar{\tau}$.

Л е м м а D.4. Если число $\bar{\tau}$ достаточно велико, то в области $\{\tau \geq \bar{\tau}\}$ существует калибровка, в которой $D = d + A$,
где

$$|A(\tau, \theta)| \leq c \cdot e^{\gamma(\bar{\tau} - \tau)}.$$

См. доказательство леммы 9.38.

Наконец, перенесем все полученные оценки в шар. Неравенства (D.3) и (D.4) принимают вид

$$|A(x)| \leq c |x|^{\gamma-1},$$

$$|F(x)| \leq c |x|^{\gamma-2}.$$

Это означает, что $A \in L_1^p$ и кривизна F ограничена в L^p при $p < 4/(2-\gamma)$. Поэтому из леммы 8.2, распространенной на пространства L^p , $p \geq 2$, следует существование калибровки Кулона. Другими словами, A калибровочно эквивалентен потенциалу $\tilde{A} = s^{-1}ds + s^{-1}As$ с $d^*\tilde{A} = 0$, $\tilde{A} \in L_1^p(B^4)$. (Можно показать, что при $p > 2$ задающее эквивалентность калибровочное преобразование непрерывно.) Следовательно, система

$$d^*\tilde{A} = 0,$$

$$d^*d\tilde{A} + d^*(\tilde{A} \wedge \tilde{A}) + (\tilde{A} \lrcorner d\tilde{A}) + (\tilde{A} + (\tilde{A} \wedge \tilde{A})) = 0$$

может быть преобразована в эллиптическое уравнение

$$\Delta \tilde{A} + \text{члены меньших порядков} = 0.$$

Регулярность доказывается точно так же, как в предложении 8.3,

и сумма $d + \tilde{A}$ задает требуемое продолжение.

Е. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Чтобы не отклоняться от главной темы, кое-где в основном тексте книги мы опустили топологические доказательства. Здесь мы воспользуемся случаем и восстановим некоторые детали этих доказательств. Для специалистов они представляют собой несложные упражнения, а читателям, не изучавшим топологию, помогут получить представление об используемых идеях и методах.

Прежде всего у читателя могло вызвать удивление наше определение формы пересечений. Обычно форма пересечений задается на группе $H^2(M; \mathbb{Z})$ по модулю кручения, в то время как мы определяем ее на всей $H^2(M; \mathbb{Z})$. Этому есть простое объяснение:

Предложение Е.1. Предположим, что $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$. Тогда группа $H^2(M; \mathbb{Z})$ не имеет кручения.

Доказательство. По теореме об универсальных коэффициентах для когомологий имеем

$$H^2(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Так как $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$, то

$$H^2(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

откуда $\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$.

Если же группа $H^2(M; \mathbb{Z})$ содержит элемент конечного порядка α , скажем такой, что $n\alpha = 0$, то для любого $\beta \in H^2(M; \mathbb{Z})$ имеет место равенство $n(\alpha \cup \beta) = n\alpha \cup \beta = 0$. Но в группе $H^4(M; \mathbb{Z})$ нет элементов конечного порядка; следовательно, $\alpha \cup \beta = 0$. Это показывает, что ядро билинейной формы

$$\cup: H^2(M; \mathbb{Z}) \otimes H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto (\alpha \cup \beta)[M]$$

содержит подгруппу $\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z})$. Из двойственности Пуанкаре над $\mathbb{Q}$, утверждающей, что отображение $\cup: H^2(M; \mathbb{Q}) \otimes H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ невырожденно, вытекает, что это ядро есть в точности $\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z})$. Следовательно, индуцированная форма пересечений

$$\omega: H^2(M; \mathbb{Z})/\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z}) \otimes H^2(M; \mathbb{Z})/\text{Tor } H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

невырожденна.

Остальные наши замечания менее тривиальны; для них нам понадобятся понятия классифицирующего пространства и пространства Эйленберга – Маклейна. (Подробно этот материал изложен в книгах [BT], [H], [Sp] и [Ste].) В курсах топологии доказывается, что для любой топологической группы G существует стягиваемое пространство EG , на котором свободно действует G . При довольно слабых ограничениях на G , которые выполняются, например, для всех групп Ли, EG является клеточным пространством, определенным однозначно с точностью до гомотопии [M4]. Факторпространство $BG = EG/G$ называется классифицирующим пространством, а расслоение $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ – универсальным расслоением.

П р и м е р ы

1. $G = \mathbb{Z}$. Группа $\mathbb{Z}$ свободно действует на прямой $\mathbb{R}$ сдвигами, а прямая $\mathbb{R}$ стягиваема. Поэтому $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и есть классифицирующее пространство $B\mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}$.

2. $G = U(1)$. В этом случае классифицирующее пространство бесконечномерно, что является типичной ситуацией. Пространство $BU(1)$ может быть получено следующим образом. Тотальное пространство $U(1)$ -расслоения

$$U(1) \rightarrow S^{2k+1} \rightarrow \mathbb{C}P^k$$

$2k$ -связно, поэтому при возрастании k сфера S^{2k+1} аппроксимирует стягиваемое пространство. Образует башни пространств

$$(E.2) \quad \begin{aligned} S^3 &\subset S^5 \subset S^7 \subset \dots, \\ \mathbb{C}P^1 &\subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3 \subset \dots \end{aligned}$$

относительно естественных вложений. Для этих башен можно определить предельные клеточные пространства, которые обозначаются соответственно через S^∞ и $\mathbb{C}P^\infty$. Пространство S^∞ стягиваемо, поэтому

$$U(1) \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

есть универсальное расслоение, откуда следует, что $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$. Имеется альтернативная конструкция для $BU(1)$. Пусть $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ — комплексное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $S^\infty \subset \mathcal{H}_\mathbb{C}$ — единичная сфера в $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}P^\infty = \mathbb{P}(\mathcal{H}_\mathbb{C})$ — ее проективизация. Эти пространства отождествляются с пределами последовательностей (E.2).

3. $G = SU(2)$. Чтобы получить классифицирующее пространство, нужно всего лишь заменить в предыдущем примере комплексные числа кватернионами. Таким образом, рассматриваются башни

$$\begin{aligned} S^7 &\subset S^{11} \subset S^{15} \subset \dots \subset S^\infty, \\ \mathbb{H}P^1 &\subset \mathbb{H}P^2 \subset \mathbb{H}P^3 \subset \dots \subset \mathbb{H}P^\infty. \end{aligned}$$

Тогда универсальное расслоение имеет вид

$$SU(2) \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty,$$

а классифицирующим пространством является $BSU(2) = \mathbb{H}P^\infty$.
Альтернативная конструкция: $\mathbb{H}P^\infty = \mathbb{P}(\mathcal{H}_\mathbb{H})$, где $\mathcal{H}_\mathbb{H}$ — сепарабельное кватернионное гильбертово пространство.

4. $G = SO(3)$. Тогда $BSO(3)$ — это многообразие Грассмана ориентированных трехмерных плоскостей π в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mathbb{R}$, а $ESO(3)$ — бесконечномерное многообразие Штифеля 3-реперов в $\mathcal{H}_\mathbb{R}$; слоем над π является множество всех ориентированных ортонормированных базисов плоскости π .

5. $G = \tilde{\mathfrak{S}}$, где $\tilde{\mathfrak{S}}$ — группа калибровочных преобразований по модулю центра. Тогда $E\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathcal{A}}$ — пространство неприводимых связностей и $B\tilde{\mathfrak{S}} = \hat{\mathcal{X}}$ (см. гл. 3).

Термин «классифицирующее пространство» означает, что BG классифицирует главные G -расслоения. Пусть M — некоторое многообразие (или, более общим образом, клеточное пространство) и $f: M \rightarrow BG$ — непрерывное отображение. Взяв прообраз универсального G -расслоения $\xi: EG \rightarrow BG$ относительно f , мы получим расслоение $f^*\xi \rightarrow M$. Можно показать, что гомотопные отображения порождают эквивалентные расслоения и что соответствие

$$[M, BG] \leftrightarrow \{\text{классы эквивалентных } G\text{-расслоений над } M\}$$

является биекцией. Например, множество $[M, \mathbb{C}P^\infty]$ классифицирует $U(1)$ -расслоения над M , а множество $[M, \mathbb{H}P^\infty]$ классифицирует $SU(2)$ -расслоения.

Пространства Эйленберга — Маклейна $K(\pi, n)$, так же, как и BG , «живущие» в гомотопической категории клеточных пространств, служат основными строительными блоками теории гомотопий. Они полностью характеризуются тем свойством, что имеют единственную нетривиальную гомотопическую группу:

$$\pi_i(K(\pi, n)) = \begin{cases} \pi & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Разумеется, при $n \geq 2$ группа π предполагается абелевой. Используя точные гомотопические последовательности для универсальных расслоений, рассмотренных в первых двух примерах, нетрудно показать, что

$$(E.3) \quad \begin{aligned} K(\mathbb{Z}, 1) &= B\mathbb{Z} = S^1, \\ K(\mathbb{Z}, 2) &= BU(1) = \mathbb{C}P^\infty. \end{aligned}$$

Пространства Эйленберга – Маклейна являются классифицирующими пространствами для когомологий. Точнее, для любого пространства M имеет место изоморфизм

$$(E.4) \quad H^n(M; \pi) \simeq [M, K(\pi, n)].$$

Этот изоморфизм может быть получен следующим образом. Применяя теорему Гуревича, а также теорему об универсальных коэффициентах, нетрудно показать, что $H^n(K(\pi, n); \pi) = \text{Hom}(\pi, \pi)$. Пусть $\iota: \pi \rightarrow \pi$ – тождественное отображение. Сопоставим произвольному отображению $f: M \rightarrow K(\pi, n)$ класс когомологий $f^*\iota \in H^n(M; \pi)$; это и есть соответствие (E.4). В примере 2 мы имеем

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1],$$

где $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ – универсальный класс Чжэня, т.е. первый класс Чжэня универсального $U(1)$ -расслоения $S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Для отображения $f: M \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ получаем, что $f^*c_1 \in H^2(M; \mathbb{Z})$ есть не что иное, как первый класс Чжэня индуцированного $U(1)$ -расслоения над M .

Теперь мы можем приступить к топологической классификации $U(1)$ - и $SU(2)$ -расслоений, о которой мы упоминали в гл. 2 и на которую опиралось предложение 2.11.

Т е о р е м а E.5. Первый класс Чжэня $c_1(\lambda) \in H^2(M; \mathbb{Z})$ классифицирует $U(1)$ -расслоения над произвольным клеточным пространством M . Второй класс Чжэня $c_2(\eta) \in H^4(M^4; \mathbb{Z})$ классифицирует $SU(2)$ -расслоения над любым компактным ориенти-

рованным четырехмерным многообразием M^4 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $U(1)$ -расслоений достаточно заметить, что пространство $\mathbb{C}P^\infty$ классифицирует одновременно и эти расслоения, и двумерные когомологии:

$$\begin{aligned} \{ \text{классы эквивалентных } U(1)\text{-расслоений } \lambda \text{ над } M \} &\simeq \\ &\simeq [M, \mathbb{C}P^\infty] = [M, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(M; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, этот изоморфизм задается соответствием $\lambda \mapsto c_1(\lambda)$.

Главные $SU(2)$ -расслоения η над M^4 соответствуют отображениям $M^4 \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$. По теореме о клеточной аппроксимации любое отображение $M^4 \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ гомотопно отображению в четырехмерный остов $S^4 = \mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^\infty$. Более того, гомотопии таких отображений можно стянуть к гомотопиям внутри пятимерного остова, который по-прежнему есть S^4 . Следовательно,

$$[M^4, \mathbb{H}P^\infty] = [M^4, S^4].$$

Но для компактного ориентированного многообразия M^4 имеет место изоморфизм

$$[M^4, S^4] \cong \mathbb{Z}$$

(см. приложение В), задаваемый степенью отображения M^4 в S^4 . Нетрудно видеть, что эта степень является также и вторым числом Чжэня индуцированного $SU(2)$ -расслоения.

Отметим, что $SU(2)$ -расслоения над пятимерными многообразиями уже не классифицируются вторым числом Чжэня; в этом случае в четырехмерных когомологиях возможны элементы конечного порядка.

Результаты гл. 10 основывались на классификации $SO(3)$ -расслоений ξ над компактным ориентированным четырехмерным многообразием $M = M^4$. Каждому такому расслоению ξ отвечают два характеристических класса – второй класс Штифеля – Уитни $w_2(\xi) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ и первый класс Понтрягина $p_1(\xi) \in H^4(M; \mathbb{Z})$. (Кроме того, в этом случае есть еще третий класс Штифеля –

Уитни, но он определяется классом $w_2(\xi)$. Группа $SU(2)$ может быть отождествлена со спинорной группой $Spin(3)$ — односвязной двулистной накрывающей группы $SO(3)$; при таком отождествлении накрывающий гомоморфизм есть не что иное, как присоединенное представление $ad: SU(2) \rightarrow SO(3)$. Гомоморфизм ad индуцирует естественное отображение $B(ad): BSU(2) \rightarrow BSO(3)$, являющееся классифицирующим отображением для присоединенного $SO(3)$ -расслоения, ассоциированного с универсальным $SU(2)$ -расслоением $ESU(2) \rightarrow BSU(2)$. Характеристические классы этого ассоциированного расслоения вычисляются с помощью весов присоединенного представления [ВН]. Таким образом, мы имеем

$$(E.6) \quad B(ad)^* w_2 = 0,$$

$$B(ad)^* p_1 = -4c_2,$$

где $w_2 \in H^2(BSO(3); \mathbb{Z}_2)$, $p_1 \in H^4(BSO(3); \mathbb{Z})$ и $c_2 \in H^4(BSU(2); \mathbb{Z})$ — подходящие универсальные характеристические классы. Отметим, что первое соотношение непосредственно вытекает из равенства $H^2(BSU(2); \mathbb{Z}) = 0$ и отражает тот факт, что $w_2(\xi)$ является препятствием к существованию на расслоении ξ спинорной структуры, т.е. поднятия $\tilde{f}: M \rightarrow BSU(2)$ классифицирующего отображения $f: M \rightarrow BSO(3)$ расслоения ξ . Наконец, в силу изоморфизма (E.4) универсальный класс $w_2 \in H^2(BSO(3); \mathbb{Z}_2)$ представляет отображение $w_2: BSO(3) \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$, и поскольку любое отображение в теории гомотопий является расслоением [ВТ, с.249], мы получаем расслоение

$$F \rightarrow BSO(3) \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2),$$

слой которого обозначен через F . Согласно (E.6), композиция $w_2 \circ B(ad) = 0$, поэтому $B(ad)$ гомотопна отображению $\theta: BSU(2) \rightarrow F$. Используя гомотопические точные последовательности расслоений $BSU(2) \rightarrow BSO(3)$ и $BSO(3) \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$, нетрудно показать, что отображение θ

индуцирует изоморфизмы гомотопических групп. Поэтому, согласно теореме Гуревича, отображение θ является гомотопической эквивалентностью. Итак, с точностью до гомотопической эквивалентности определено расслоение

$$(E.7) \quad \begin{array}{ccc} BSU(2) & \xrightarrow{B(ad)} & BSO(3) \\ & & \downarrow w_2 \\ & & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{array}$$

Проделав эту подготовительную работу, мы можем теперь сформулировать следующее утверждение:

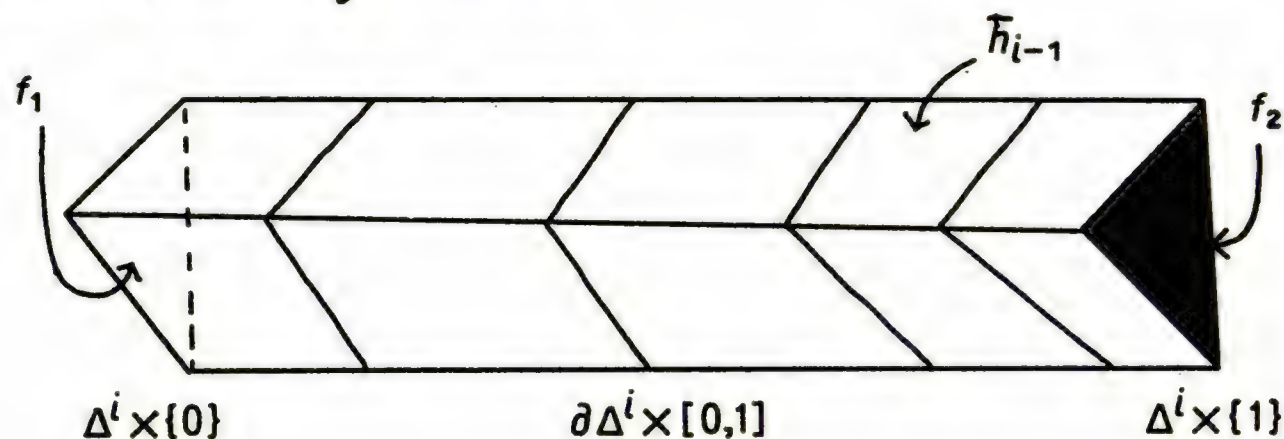
Т е о р е м а Е.8. Пусть ξ_1, ξ_2 — некоторые $SO(3)$ -расслоения над компактным ориентированным четырехмерным многообразием M . Предположим, что $w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2)$ и $p_1(\xi_1) = p_1(\xi_2)$. Тогда расслоения ξ_1 и ξ_2 топологически эквивалентны.

Строго говоря, это не является классификацией, поскольку мы не указываем, какие пары w_2, p_1 могут быть реализованы. Однако в гл. 10 нам была нужна лишь данная здесь характеристика $SO(3)$ -расслоений. Идея доказательства этой теоремы совершенно прозрачна. Так как $w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2)$, то «разность» $\xi_2 - \xi_1$ поднимается до $SU(2)$ -расслоения, класс Чжэня $-\frac{1}{4}(p_1(\xi_2) - p_1(\xi_1))$ которого обращается в нуль. Тогда $\xi_2 = \xi_1$ по теореме Е.5. Разумеется, не существует способа придать «разности» $\xi_2 - \xi_1$ смысл $SO(3)$ -расслоения. Приведенное ниже доказательство, любезно предоставленное нам Ричардом Лашофом, ставит эту интуитивную идею на строгую основу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_1, f_2: M \rightarrow BSO(3)$ — классифицирующие отображения для расслоений ξ_1, ξ_2 соответственно; нам нужно показать, что f_1 гомотопно f_2 . Прежде всего $w_2 \circ f_1$ и $w_2 \circ f_2$ являются гомотопными отображениями из M в $K(\mathbb{Z}_2, 2)$, поскольку $w_2(\xi_1) = w_2(\xi_2)$. Обозначим связывающую их гомотопию через $h: M \times [0, 1] \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$.

Используя клеточную структуру на M , попытаемся поднять h шаг за шагом до гомотопии $\tilde{h}: M \times [0, 1] \rightarrow BSO(3)$. Предположим, что гомотопия $\tilde{h}_{i-1}$ уже определена на $(i-1)$ -мерном остове мно-

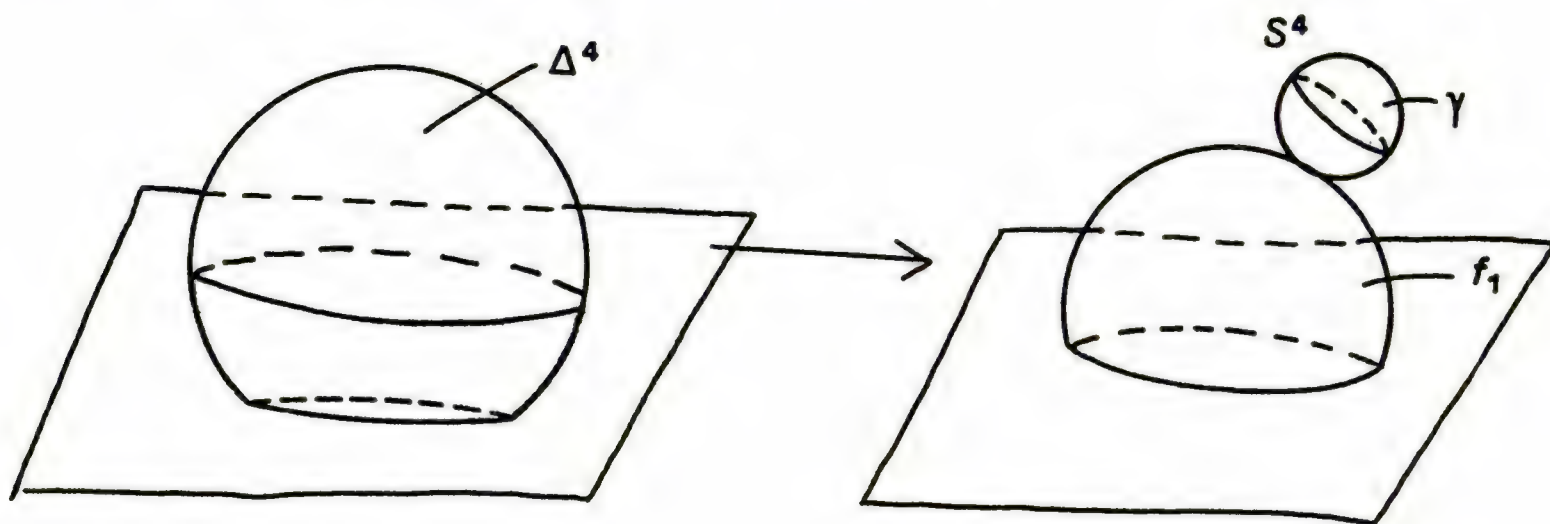
гооморазия M (умноженном на $[0, 1]$), и рассмотрим i -мерную клетку $\Delta^i \subseteq M$. Так как расслоение (Е.7) тривиально над $\tilde{h}(\Delta^i \times [0, 1])$, то отображения f_1 и f_2 вместе с гомотопией $\tilde{h}_{i-1}$ задают отображение $S^i \rightarrow BSU(2)$, т.е. элемент гомотопической группы $\pi_i(BSU(2))$:



Гомотопия $\tilde{h}_{i-1}$ может быть продолжена на клетку Δ^i тогда и только тогда, когда этот элемент равен нулю. Поскольку группы $\pi_i(BSU(2)) = \pi_{i-1}(SU(2))$ обращаются в нуль при $i \leq 3$, мы получаем по индукции поднятие $\tilde{h}_3$ на трехмерный остов многообразия M . Для простоты будем считать, что клеточное разбиение M содержит ровно одну четырехмерную клетку Δ^4 (такое разбиение всегда можно построить). Кроме того, предположим, используя дополнительную гомотопию $\tilde{h}_3$, что $f_1 = f_2$ на трехмерном остове. Стыгивая середину клетки Δ^4 в точку, мы получим отображение $\mathcal{B}: M \rightarrow M \vee S^4$. Ясно, что индуцированное отображение в когомологиях

$$\mathcal{B}^*: H^*(M \vee S^4) = H^*(M) \oplus H^*(S^4) \rightarrow H^*(M)$$

является просто сложением. Поскольку $f_1 = f_2$ вне Δ^4 , мы можем представить f_2 в виде $f_2 = (f_1 \vee \gamma) \circ \mathcal{B}$ для некоторого отображения $\gamma: S^4 \rightarrow BSO(3)$.



Так как $H^2(S^4; \mathbb{Z}_2) = 0$, то существует поднятие $\tilde{\gamma}: S^4 \rightarrow BSU(2)$ отображения γ . (Иными словами, каждое $SO(3)$ -расслоение над S^4 может быть наделено спинорной структурой.) Несложное вычисление с использованием соотношения (Е.6) показывает, что

$$\tilde{\gamma}^*(c_2) = -\frac{1}{4} (p_1(\xi_2) - p_1(\xi_1)) = 0.$$

Из классификации $SU(2)$ -расслоений (теорема Е.5) вытекает, что отображение $\tilde{\gamma}$, а значит, и отображение γ , гомотопически тривиально. Следовательно, отображения f_1 и f_2 гомотопны, как и утверждалось. Отметим, что γ есть не что иное, как гипотетическая «разность» $\xi_2 - \xi_1$, обсуждавшаяся перед доказательством.

Пространство Эйленберга – Маклейна $K(\mathbb{Z}, 2)$, и в частности его реализация в виде гладкого многообразия $\mathbb{C}P^\infty$, играет важную роль при доказательстве утверждения, которым мы неявно пользовались в гл. I и в приложении В.

Предложение Е.9. Пусть M – гладкое компактное ориентированное n -мерное многообразие и $x \in H_{n-2}(M; \mathbb{Z})$ – класс гомологий M коразмерности 2. Тогда x может быть представлен гладким ориентированным подмногообразием в M .

Доказательство. По двойственности Пуанкаре классу гомологий $x \in H_{n-2}(M; \mathbb{Z})$ соответствует двумерный класс когомологий $x^* \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Основываясь на изоморфизме (Е.4), можно представить x^* отображением $f: M \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$. Вспоминая «телескопическую конструкцию» (Е.2) для пространства $\mathbb{C}P^\infty$ и используя компактность многообразия M , находим, что образ отображения f лежит в некотором конечномерном остове $\mathbb{C}P^N$. Малым шевелением f в его гомотопическом классе можно добиться того, что f станет трансверсальным к подмногообразию $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$. Но тогда $f^{-1}(\mathbb{C}P^{N-1})$ и есть требуемый гладкий представитель класса гомологий x .

ЛИТЕРАТУРА

- [Ar] Aronszajn N. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of the second order. - J. Math. Pures Appl.(9), 36 (1957), 235-249.
- [A1] Atiyah M.F. K-Theory. - W.A. Benjamin, Inc., 1967.
[Имеется перевод: Атья М. Лекции по К-теории. - М.: Мир, 1967.]
- [A2] Atiyah M.F. Geometry of Yang-Mills Fields. - Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore. - Pisa, 1979.
- [AB] Atiyah M.F., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. - Proc. R.Soc. London A, 308 (1982), 523-615.
- [ABS] Atiyah M.F., Bott R., Shapiro A. Clifford modules. - Topology 3(1964), Suppl. 1, 3-38.
- [ADHM] Atiyah M.F., Drinfeld V.G., Hitchin N.J., Manin Yu.I. Construction of instantons. - Phys. Lett. 65A (1978), 185-187.
- [AHS] Atiyah M.F., Hitchin N., Singer I.M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. - Proc. R.Soc.London A, 362 (1978), 425-461.
- [APS] Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I. - Math.Proc. Camb. Phil.Soc., 77 (1975), 43-69.
- [AS] Atiyah M.F., Singer I.M. The index of elliptic operators: IV. - Ann. Math., 93(1971), 119-138. [Имеется перевод: УМН, 1972, 27, № 4, с. 161-178.]
- [Au] Aubin T. Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations. - Springer-Verlag, 1982.

- [BPST] Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Y. - Phys.Let. 59B(1975), 85.
- [B] Bleeker D. Gauge Theory and Variational Principles. - Addison Wesley, London, 1981.
- [Bo] Bochner S. Vector fields and Ricci curvature. - Bull. Amer. Math.Soc., 52(1946), 776-797.
- [BH] Borel A., Hirzebruch F. Characteristic classes and homogeneous spaces. Part I. - Amer. J. Math., 80(1958), 458-538.
- [BT] Bott R., Tu L. Differential Forms in Algebraic Topology. - Springer-Verlag, 1982.
- [Bou] Bourguignon J.P. Formules de Weitzenböck en dimension 4. In: Géométrie Riemannienne de dimension 4. - CEDIC, Paris, 1981. [Имеется перевод: Бургиньон Ж.-П. Формулы Вейтценбёка в размерности 4. В кн.: Четырёхмерная риманова геометрия. - М.: Мир, 1985, с.260 - 273.]
- [BL] Bourguignon J.P., Lawson H.B., Jr. Yang-Mills Theory: Its physical origins and differential geometric aspects. In: Seminar on Differential Geometry, S.T. Tau, ed.. Ann. Math.Studies, 102. - Princeton University Press, 1982, 395-422.
- [C] Casson A. Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds. In: A la recherche de la topologie perdue, Ed. Lucien Guillou, Alexis Marin. Progress in Mathematics, v.62. - Birkhäuser, 1986, 201-244. [Готовится русский перевод.]
- [Ce] Cerf J. Sur les Difféomorphismes de la Sphère de Dimension Trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics 53. - Springer-Verlag, 1968.
- [CE] Cheeger J., Ebin D. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. - North Holland Mathematical Library, Vol. 9, 1975.
- [CS] Conway J.H., Sloane N.J.A. On the enumeration of lattices of determinant one. - J. Number Theory, 15(1982), 83-94.
- [CH] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. - Interscience, 1953. [Имеется перевод более раннего издания: Курант Р., Гильберт Д. Методы матема-

- тической физики, т. I. - М.: Гостехтеориздат, 1951.]
- [DW] Dold A., Whitney H. Classification of oriented sphere bundles over a 4-complex. - Ann. Math., 69(1959), 667-677.
- [D] Donaldson S.K. An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds. - J. Diff. Geom., 18(1983), 269-316.
- [Do] Dornhoff L. Group Representation Theory, Part A. Pure and Applied Mathematics. - Marcel Dekker, Inc., 1971.
- [DV] Douady A., Verdier J.L. Les équations de Yang-Mills. - Astérisque 71-72, Société Mathématique de France, 1980.
- [FS1] Fintushel R., Stern R. $SO(3)$ -connections and the topology of 4-manifolds. - J. Diff. Geom., 20(1984), 523-539.
- [FS2] Fintushel R., Stern R. Pseudofree orbifolds. - Ann. Math., 122(1985), 335-364.
- [Fr1] Freedman M. The topology of four-dimensional manifolds. - J. Diff. Geom., 17(1982), 357-454.
- [Fr2] Freedman M. There is no room to spare in four dimensional space. - AMS Notices, 31(1984), 3-6.
- [FK] Freedman M., Kirby R. A geometric proof of Rohlin's theorem. - Proc. Symp. Pure Math., 32:2(1978), 85-98.
- [F] Friedman A. Partial Differential Equations. - Holt, New York, 1969.
- [GT] Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. - Springer-Verlag, 1977.
- [G] Gompf R. Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies. - J. Diff. Geom., 18(1983), 317-328.
- [GW] Greene R.E., Wu H. Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole. Lecture Notes in Math. 699. - Springer-Verlag, 1979.
- [He] Hempel J. Three-Manifolds. Ann. Math. Studies, 86. - Princeton University Press, 1967.
- ['] 't Hooft Gerard. Gauge theories of the forces between elementary particles. - Scientific American, 243 (June 1980), 104-138.
- [H] Husemoller D. Fibre Bundles. Sec. Ed. - Springer-Verlag, 1966. [Имеется перевод: Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. - М.: Мир, 1970.]
- [HM] Husemoller D., Milnor J. Symmetric Bilinear Forms. - Springer-Verlag, 1973. [Имеется перевод: Милнор Дж.,

- Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. - М.: Наука, 1986.]
- [JNR] Jackiw R., Nohl C., Rebbi C. Conformal properties of pseudoparticle configurations. - Phys.Rev.D., 15(1977), 1642-1646.
- [JT] Jaffe A., Taubes C. Vortices and Monopoles. Progress in Physics 2. - Birkhäuser, 1980.
- [KM1] Kervaire M., Milnor J. Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin. - Proc. Internat. Congr. Math. Edinburgh, 1958, 454-458.
- [KM2] Kervaire M., Milnor J. Groups of homotopy spheres I. - Ann. Math., 77 (1963), 504-537.
- [KS] Kirby R., Siebenmann L. Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations. Ann. Math. Studies, 88. - Princeton University Press, Princeton, N.J., 1977.
- [KN1] Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry, Vol. 1. - Wiley-Interscience, 1963. [Имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.1. - М.: Наука, 1981.]
- [KN2] Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry, Vol. 2. - Wiley-Interscience, 1969. [Имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.2. - М.: Наука, 1981.]
- [K] Kuranishi M. New proof of the existence of locally complete families of complex structures. In: Proceed.Conf. on Complex analysis, A.Aeppli et al, eds. - Springer-Verlag, 1965, 142-154.
- [L] Lichnerowicz A. Spineurs harmoniques. - C.R. Acad.Sci. Paris Ser. A-B, 257(1963), 7-9.
- [Ma] Marsden J. Applications of Global Analysis in Mathematical Physics. - Publish or Perish, 1974.
- [May] Mayer M. In: Fiber-Bundle Techniques in Gauge Theory. Lecture Notes in Physics, 67. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [MSY] Meeks W. III, Simon L., Yau S.T. Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. - Ann. Math., 116(1982), 621-659.
- [MYI] Meeks W. III, Yau S.T. The classical Plateau problem

- and the topology of three dimensional manifolds. - Topology, 21 (1982), 409-442.
- [MY2] Meeks W. III, Yau S.T. Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. - Ann. Math. 112 (1980), 441-484.
- [M1] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. - Ann. Math., 64(1956), 399-405. [Имеется перевод: Милнор Дж. О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. - Сб. Математика, 1959, I : 3, с. 35 - 42.]
- [M2] Milnor J. On simply connected 4-manifolds. Symposium Internacional Topologia Algebraica. - Mexico, 1958, 122-128.
- [M3] Milnor J. Topology from the Differentiable Viewpoint. - University Press of Virginia, 1976. [Имеется перевод в кн.: Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. - М.: Мир, 1972.]
- [M4] Milnor J. Construction of universal bundles II. - Ann. Math., 63(1956), 430-436.
- [M5] Milnor J. Morse Theory. - Ann. Math. Studies, 51. - Princeton University Press, Princeton, 1963. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1965.]
- [MS] Milnor J., Stasheff J. Characteristic Classes. - Ann. Math. Studies, 76. - Princeton University Press, Princeton, 1974. [Имеется перевод: Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. - М.: Мир, 1979.]
- [MTW] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. - W.H. Freeman and Company, 1973. [Имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. В 3-х томах. - М.: Мир, 1977.]
- [Mo] Moise E. Affine Structure in 3-manifolds I, II, III, IV, V. - Ann. Math., 54 (1951), 506-533; 55(1952), 172-176; 55(1952), 203-214; 55(1952), 215-222; 56(1952), 96-114.
- [Mor] Morrey C.B., Jr. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. - Springer-Verlag, 1966.
- [PI] Palais R.S. Foundations of Global Non-Linear Analysis. - W.A. Benjamin, Inc., 1968.
- [P2] Palais R.S. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. - Ann. Math. Studies, 57. - Princeton University Press,

- Princeton, 1965. [Имеется перевод: Пале Р. Семинар по теореме Атьи - Зингера об индексе. - М.: Мир, 1970.]
- [Pa] Parker T. Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds. - *Comm.Math.Phys.*, 85(1982), 1-40.
- [Pe] Peterson F.P. Some remarks on Chern classes. - *Ann. Math.*, 69(1959), 414-420.
- [Q] Quinn F. Ends III. - *J. Diff.Geom.*, 17(1982), 503-521.
- [R] Рохлин В.А. Новые результаты в теории четырехмерных многообразий. - *ДАН СССР*, т. 84, 1952, с. 221 - 224.
- [SU] Sacks J., Uhlenbeck K. The existence of minimal 2-spheres. - *Ann. Math.*, 113(1981), 1-24.
- [Se] Sedlacek S. A direct method for minimizing the Yang-Mills functional on 4-manifolds. - *Comm.Math. Phys.*, 86(1982), 515-527.
- [S] Singer I.M. Some remarks on the Gribov ambiguity. - *Comm. Math.Phys.*, 60(1978), 7-12.
- [ST] Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. In: *Global Analysis, Papers in honor of K.Kodaira* (ed. D.Spencer and S.Iyanaga). - Princeton University Press, 1969, 335-365.
- [Sm] Smale S. An infinite dimensional version of Sard's theorem. - *Amer. J.Math.*, 87(1968), 861-866.
- [Sp] Spanier E. *Algebraic Topology*. - McGraw Hill, Inc., 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971.]
- [St1] Stallings J. The piecewise-linear structure of Euclidean space. - *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 58(1962), 481-488.
- [St2] Stallings J. *Group Theory and Three-Dimensional Manifolds*. Yale Mathematical Monographs, No. 4. - Yale University Press, 1971. [Имеется перевод в кн.: Масси У., Столлинс Дж. Введение в алгебраическую топологию. М.: Мир, 1977.]
- [Ste] Steenrod N. *The Topology of Fibre Bundles*. - Princeton University Press, Princeton, 1951. [Имеется перевод: Стинрод Н. Топология косых произведений. - М.: ИЛ, 1953.]

- [Sn] Stern R. Instantons and the topology of 4-manifolds. - The Mathematical Intelligencer, 5:3(1983), 39-44.
- [Sto] Stong R.E. Notes on Cobordism Theory. - Princeton University Press, 1968. [Имеется перевод: Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. - М.: Мир, 1973.]
- [T1] Taubes C.H. Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. - J.Diff.Geom., 17(1982), 139-170.
- [T2] Taubes C.H. Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection form. - J.Diff. Geom., 19(1984), 517-560.
- [Tr] Trèves F. Basic Linear Partial Differential Equations. - Academic Press, New York, 1975.
- [U1] Uhlenbeck K. Connections with L^p bounds on curvature. - Comm. Math. Phys., 83(1982), 31-42.
- [U2] Uhlenbeck K. Removable singularities in Yang-Mills fields. - Comm. Math. Phys., 83(1982), 11-29.
- [V] Varadarajan V.S. Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations. - Prentice Hall, 1974.
- [Wa] Warner F. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. - Springer-Verlag, 1983. [Имеется перевод: Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. - М.: Мир, 1987.]
- [W] Whitehead J.H.C. On simply connected 4-dimensional polyhedra. - Comment. Math.Helv., 22(1949), 48-92.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автодуальная и антиавтодуальная составляющие (self-dual and anti-self-dual pieces) 51
- Бьянки тождество (Bianchi identity) 243
- Бэровские множества (Baire sets) 87
- Вейля кривизна (Weyl curvature) 131, 243, 244
- Вейтценбёка формулы (Weitzenböck formulas) 131, 236
- Векторное расслоение (vector bundle) 48
- Виртуальное расслоение (virtual bundle) 106, 107
- Воротник (collar) 161
- Гильбертова группа Ли (Hilbert Lie group) 70
- Главное расслоение (principal bundle) 161
- Гладкая структура (differentiable structure) 31
- График действия 73
- Грибова неоднозначность (Gribov ambiguity) 57
- Группа калибровочных преобразований (group of gauge transformations) 51
- соболевских калибровочных преобразований 225
- Дональдсона теорема (Donaldson theorem) 39, 62 - 64, 214
- Индекс (index) 87, 106
- Индексное расслоение (index bundle) 106, 107
- Инстантоны (instantons) 58, 123, 189
- Калибровочная группа (gauge group) 51, 110
- Калибровочное преобразование (gauge transformation) 51
- Калибровочный потенциал (gauge potential) 48

- Кассона ручки (Casson handles) 43
 Като неравенство (Kato's inequality) 130
 Кватернионные обозначения (quaternionic notation) 119
 Квинна теорема (Quinn theorem) 40
 Кёрби - Зибенманна препятствие (Kirby - Siebenmann obstruction)
 37
 Классификация унимодулярных форм 37
 Классифицирующее пространство (classifying space) 249, 251
 Кобордантные подмногообразия (cobordant submanifolds) 231
 Кобордизм (cobordism) 231
 Ковариантное дифференцирование (covariant derivative) 48 - 50
 Компактность пространства модулей I86
 Конформная инвариантность автодуальных уравнений Янга - Миллса
 I36
 Кривизна (или калибровочное поле) связности (curvature (or gauge
 field) of a connection) 50
 Куммера поверхность (Kummer surface) 36, 39, 40, 64

 Лапласиан (Laplacian) 239
 Леви-Чивита связность (Levi-Civita connection) 237
 Лемма о композиции (composition lemma) 134
 - - локальной калибровке (local gauge fixing lemma) 165, 166
 Ли производные (Lie derivatives) 200
 Локализованные связности (concentrated connections) 181

 Масштаб (scale) инстантона I23
 - или ширина (width) формы I74
 Метод непрерывности (continuity method) 140
 Модели инстантонов I89

 Неприводимые связности (irreducible connections) 67
 Нечетная форма (odd form) 37

 Окаймленное вложение (collared embedding) 44
 Оператор * (star operator) 51
 Оснащение (framing) 231
 Оснащенно кобордантные подмногообразия (framed cobordant sub-
 manifolds) 231

- Оснащенный кобордизм (framed cobordism) 231
- Основной инстантон (basic instanton) 123
- Оценка распада (decay estimate) 193
- Параметризованное пространство модулей (parametrized moduli space) 86
- Понтрягина класс (Pontrjagin class) 54
- Тома теорема (Pontrjagin - Thom theorem) 232
- Почти автодуальная связность (almost self-dual connection) 144
- сглаживаемое многообразие (almost smooth manifold) 39
- Приводимая (или расщепляющаяся) связность (reducible (or split) connection) 71, 221
- Принцип максимума (maximum principle) 134, 147
- Пространство модулей (moduli space) инстантонов 46, 58
- - топологическая структура 60 - 61
- Процедура прививки (grafting procedure) 124
- Радиус инъективности (injectivity radius) 125
- Раздутие метрики 142
- Ранг (rank) 36
- Регулярность автодуальных связностей 167
- Риманова кривизна (Riemannian curvature) 237
- Риччи кривизна (Ricci curvature) 242
- - бесследовая (traceless) 131
- Рохлина теорема 38
- Сарда - Смейла теорема (Sard - Smale theorem) 87, 95
- Связность (connection) 48 - 50
- Сигнатура (signature) 36
- Символ (symbol) оператора 238
- Скалярная кривизна (scalar curvature) 131, 242
- Скрученная функция (twisted function) 130
- Соболева теоремы вложения (Sobolev embedding theorems) 132, 133
- Соболевское пространство связностей 225
- Срез (slice) действия 73
- Таубса проекция (Taubes projection) 158
- Теорема о воротнике (collar theorem) 188
- - однозначном продолжении (unique continuation) 135

- - среднем значении (mean value inequality) 134
- - устранении особенностей (removable singularities theorem) 137, 245
- - эллиптической регулярности (elliptic regularity) 135
- Теоремы компактности (compactness theorems) 165
- Техника склеиваний (patching argument) 171, 208
- Топологическая классификация расслоений 252, 255
- Топологический заряд (topological charge) 54
- Трансверсальная калибровка (transversal gauge) 206

- Уленбек теоремы (K. Uhlenbeck theorems) 137
- Универсальное расслоение (universal bundle) 249
- Унимодулярная форма (unimodular form) 34

- Финтушела - Стерна теорема (Fintushel - Stern theorem) 215, 218
- Форма пересечений (intersection form) 35, 248
- Фредгольмово отображение (Fredholm map) 87
- Фридмана классификация (Freedman classification) 37
- Функции перехода (transition functions) 32, 48

- Ходжа оператор (Hodge operator) 136
- Хопфа отображение (Hopf map) 113

- Центр (centre) инстантона I23
 - формы I74

- Четная форма (even form) 36 - 37
- Чжэня - Вейля формула (Chern - Weil formula) 216
 - классы 53

- Шейка (neck) инстантона I89
- Штифеля - Уитни класс (Stiefel - Whitney class) 106

- Эйленберга - Маклейна пространства (Eilenberg - MacLane spaces) 251, 257
- Экзотическая гладкая структура (exotic differentiable structure) 33
- Экспоненциальная калибровка (exponential gauge) 204 - 206

Экспоненциальное отображение (exponential map) 226

Эллиптический комплекс (elliptic complex) 238

Янга - Миллса поле (Yang - Mills field) 56

- - связность (connection) 56

- - уравнения (equations) 47, 55

- - - автодуальные (self-dual) 57

- - - антиавтодуальные (anti-self-dual) 57

- - функционал (functional) 55

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
Предисловие	9
Введение	12
Глоссарий	27
Глава 1. Фальшивые $\mathbb{R}^4$	31
Гладкие структуры	31
Четырехмерные топологические многообразия	34
Гладкие четырехмерные многообразия	38
Хирургическая аномалия	40
Глава 2. Уравнения Янга – Миллса	46
Связности	47
Топологические квантовые числа	53
Функционал Янга – Миллса	55
Линейные расслоения	58
Теорема Дональдсона	60
Глава 3. Многообразия связностей	67
Пространства Соболева	69
Приводимые связности	71
Теорема о срезе	72
Параметризованное пространство модулей	77
Пространство модулей	86
Глава 4. Конусы над $\mathbb{C}P^2$	91
Снова о срезах	92
Структура особой точки	94
Возмущение метрики	99
Глава 5. Ориентируемость	105
Индексные расслоения	106
Компоненты группы $\mathcal{G}$	110
Элемент -1	114
Глава 6. Подготовительный материал для теоремы Таубса	117
Инстантоны на S^4	119
Процедура прививки	124
Необходимые аналитические средства	129
Аналитические свойства автодуальных уравнений Янга – Миллса	136

Глава 7.	Теорема Таубса	139
	Раздутие метрики	142
	Оценка собственного значения	149
	Линеаризованное уравнение	153
	Проекция Таубса	158
Глава 8.	Компактность	163
	Компактность и регулярность	165
	Измерение локализованной кривизны	172
	Компактность в $\mathcal{M}$	182
Глава 9.	Теорема о воротнике	187
	Оценки распада	189
	Конформные деформации	196
	Экспоненциальные калибровки	204
	Связность воротника	210
Глава 10.	Техника Финтушела и Стерна	215
	Пространство модулей для $SO(3)$ -расслоений	216
	Приводимые связности	219
	Аналитические детали	222
Приложения		225
	A. Группа соболевских калибровочных преобразований	225
	B. Конструкция Понтрягина – Тома	231
	C. Формулы Вейтценбека	236
	D. Устранение особенностей	245
	E. Топологические замечания	248
Литература		258
Предметный указатель		265

Научное издание

Дэниел Фрид, Карен Уленбек

Инстантоны и четырехмерные многообразия

Зав. редакцией чл.-корр. АН СССР В.И. Арнольд

Зам. зав. редакцией А.С. Попов

Ст. научн. редактор Н.И. Плужникова

Мл. научн. редактор И.В. Герасимова

Художник А.А. Лукьяненко

Художественный редактор В.И. Шаповалов

Технический редактор Е.В. Алехина

Корректор Л.Д. Панова

ИБ № 6613

Подписано к печати 30.03.88. Фотоофсет.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объем 8,50 бум.л. Усл. печ.л. 15,81. Усл.кр.-отт. 16,20. Уч. изд.л. 12,35. Изд. № 1/5854. Тираж 3750 экз. Зак. 1356

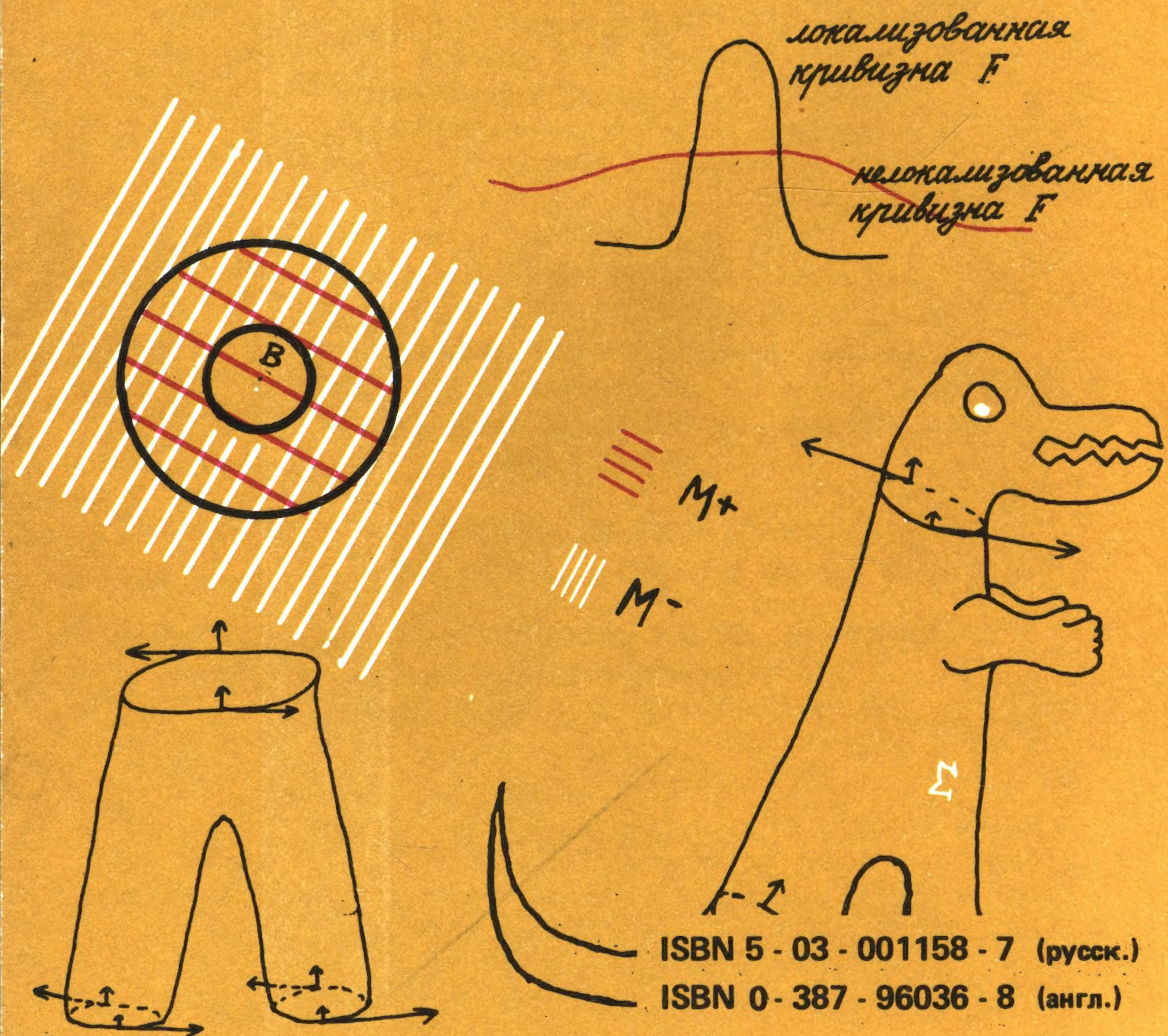
Цена 1 р. 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" 129820,

ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата" Госкомиздата СССР.

109033, Москва, ул. Волочаевская, 40.





Д.Фрид, К.Уленбек

ИСТАНОУЛЫ И ЧЕТЫРБРАЗМА
ЯНДЫН МНОГООБРАЗМА